
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215416 7





LEÇONS

SUR LES

COORDONNÉES TANGENTIELLES

GÉOMÉTRIE PLANE

LEÇONS

SUR LES

COORDONNÉES TANGENTIELLES

PAR

G. PAPELIER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLÉANS

Avec une Préface

DE

M. P. APPELL

MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR A LA SORBONNE

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE PLANE

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie

63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

PRÉFACE

La géométrie analytique, créée par Descartes dans un ouvrage paru en 1637, repose sur l'emploi de méthodes qui permettent de donner une forme algébrique aux problèmes de géométrie. Ces méthodes consistent à faire correspondre à chaque point du plan un système de deux nombres, appelés *coordonnées* du point ; une équation entre ces coordonnées représente une courbe ; les points communs à deux courbes s'obtiennent en résolvant leurs équations.

Tout problème de géométrie se trouve ainsi ramené à une question de calcul ; inversement, tout fait analytique peut être interprété géométriquement. Ainsi le problème des tangentes conduit à la notion de la dérivée, ou fournit une représentation géométrique de cette notion ; l'idée d'invariant algébrique ou différentiel conduit à la découverte de propriétés géométriques, laissées invariables par certaines transformations.

Mais le système de coordonnées cartésiennes dans le plan ou dans l'espace est loin d'être le seul qui

permette de représenter géométriquement les faits algébriques et analytiques. On peut en effet développer l'idée de DESCARTES sous un autre point de vue, en définissant, par un système de nombres, non plus un *point* du plan ou de l'espace, mais un être géométrique quelconque, ligne droite ou courbe, surface plane ou courbe. Ces nombres qui sont, par exemple, les coefficients figurant dans les équations cartésiennes de l'élément géométrique considéré, s'appellent encore, par extension, les coordonnées de l'élément. Ainsi une droite dans un plan est définie par deux nombres qui sont ordinairement les inverses des segments qu'elle détache sur les axes ; un plan dans l'espace est défini par trois nombres analogues ; un cercle dans le plan est défini par trois coordonnées qui sont les coordonnées cartésiennes du centre et la puissance de l'origine par rapport au cercle ; une droite dans l'espace est définie par quatre nombres,... etc.

Une équation entre trois variables a, b, c représente alors, soit une surface lieu de points, si a, b, c sont regardées comme les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, soit une surface enveloppe de plans, si a, b, c sont regardées comme les coordonnées d'un plan, soit un système de cercles dans un plan fixe, si les variables sont regardées comme les coordonnées d'un cercle...., etc ; de même, une équation entre quatre variables peut être interprétée comme représentant une surface dans l'espace à quatre dimensions, ou un système de droites dans l'espace à trois dimensions... etc.

En résumé, on peut interpréter géométriquement, d'une infinité de manières, les faits algébriques et analytiques relatifs à des équations contenant un nombre quelconque de variables. Les interprétations les plus intéressantes sont évidemment les plus simples.

Pour la géométrie plane, il existe deux systèmes également simples : celui qui consiste à prendre comme élément géométrique le *point* défini par *deux coordonnées,* et celui qui consiste à prendre comme élément la *droite* définie également par *deux coordonnées.*

Le développement du premier point de vue fait l'objet de la *géométrie ponctuelle* ; celui du second fait l'objet de la *géométrie tangentielle.* Les propriétés algébriques des systèmes d'équations à deux variables donnent alors, suivant la façon dont on les interprète, des propriétés des ensembles de points ou des propriétés des ensembles de droites. Les deux séries de théorèmes que l'on obtient de cette manière ne sont donc que la traduction géométrique des mêmes faits algébriques; et l'on passe d'un théorème de l'une des séries au théorème correspondant ou corrélatif de l'autre, en y remplaçant les points par des droites et réciproquement.

Nous sommes ainsi amenés à un autre point de vue, d'après lequel le passage de la géométrie ponctuelle à la géométrie tangentielle peut être regardé comme un mode particulier de transformation des figures, faisant correspondre des droites aux points et inversement.

Le fait que tout théorème peut être transformé ainsi a reçu de Chasles le nom de *Principe de dualité* (1).

Voici, sur l'origine et le développement de ces idées, quelques renseignements historiques empruntés en majeure partie à l'*Aperçu historique* de Chasles.

De Beaune semble avoir eu le premier l'idée de définir certaines courbes à l'aide des propriétés de leurs tangentes ; par une question de cette nature posée à Descartes, il donna naissance à la *Méthode inverse des tangentes*, dont Descartes jeta les fondements en regardant un point d'une courbe comme l'intersection de deux tangentes infiniment voisines.

La théorie des développées, due à Huygens, fournit ensuite des exemples particulièrement importants de courbes regardées comme enveloppées par des droites.

Mais on peut dire qu'Euler, en considérant une courbe quelconque comme enveloppe d'une droite de la forme

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \varphi(\alpha),$$

donna le premier exemple d'une courbe définie dans un système de coordonnées tangentielles ; ce système, dans lequel les éléments de longueur et les rayons de courbure de la courbe et de ses développées successives ont des expressions particulièrement simples, se trouve indiqué à la page 58 de ce volume.

Les coordonnées de la droite sous la forme actuellement employée ont été introduites à peu près à la même époque, par Chasles (*Aperçu historique*, 1837, et

(1) *Mémoire de géométrie, sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie*, présenté à l'Académie de Bruxelles en .

Mémoire de Géométrie, 1829) et par Plücker (*Journal de Crelle*, tome V, 1829).

Quant aux méthodes de tranformation qui ont conduit au principe de dualité, elles ont d'abord été employées sur la sphère. D'après un théorème dû à Snellius, vers 1630, toute figure sphérique possède une figure supplémentaire, de telle nature qu'à chaque point de la première corresponde un arc de grand cercle de la deuxième et inversement.

En 1685, La Hire, dans son *Traité des Coniques*, indiqua les propriétés réciproques des points et droites qu'on nomme actuellement *pôles* et *polaires* par rapport à une conique. Ces propriétés ont été étendues par Monge aux surfaces du second ordre, et c'est de l'époque de Monge seulement que datent l'importance et les usages de cette théorie des pôles et polaires (1).

Une des premières et des plus célèbres applications fut celle qui permit à Brianchon de déduire, du théorème de Pascal sur six points d'une conique, une propriété correspondante de six tangentes (1806).

Le principe de dualité dans sa généralité a d'abord été énoncé par Poncelet (*Annales de Mathématiques*, tome VIII, 1817-1818), qui l'a déduit de la théorie des pôles et polaires ; ce principe a été ensuite établi, indépendamment des coniques, par Gergonne, par Möbius (*Barycentrischer Calcul*, 1827) et par Chasles.

L'ouvrage de M. Papelier a pour objet le développement de la géométrie tangentielle depuis les pre-

---

(1) *Aperçu historique*, p. 124.

miers éléments jusqu'à la théorie des coniques et des courbes algébriques. L'auteur s'est efforcé de suivre pas à pas les méthodes employées dans la géométrie ponctuelle, de sorte que le lecteur, déjà familiarisé avec cette dernière, n'aura aucun effort nouveau à faire ; il n'aura qu'à transposer les méthodes et les théorèmes qu'il connaît, en remplaçant les points par des droites et réciproquement.

Quant aux commençants, ils suivront avec autant de facilité cette manière de présenter les faits que la manière ordinaire.

Cet ouvrage, écrit avec clarté et rigueur, renferme des développements sur certaines questions qu'on ne traite pas habituellement en coordonnées tangentielles : telles sont, la discussion de la forme d'une courbe dans le voisinage d'une tangente ou d'une asymptote, à l'aide du polygone de Newton, la classification des coniques, l'étude géométrique du contact de deux coniques, les invariants simultanés de deux coniques. De nombreux exercices sont traités dans le texte ou proposés au lecteur avec des indications sur leur solution.

Le livre de M. Papelier est appelé à rendre de grands services, en familiarisant l'esprit des élèves avec une autre face de la géométrie analytique, et en les mettant à même de tirer de chaque résultat de calcul deux théorèmes corrélatifs.

P. Appell.

Paris, le 4 mars 1894.

LEÇONS

SUR LES

COORDONNÉES TANGENTIELLES

GÉOMÉTRIE PLANE

CHAPITRE PREMIER

LE POINT ET LA DROITE

1. L'équation d'une droite en coordonnées rectilignes homogènes peut s'écrire

$$ux + vy + wz = 0;$$

elle renferme trois coefficients, u, v, w; mais comme la droite ne change pas quand ces coefficients varient proportionnellement, on peut dire que l'équation de la droite contient *deux* paramètres; elle sera par suite déterminée si l'on connaît deux relations entre les trois coefficients.

Ces relations s'obtiennent dans la plupart des cas en assujettissant la droite à certaines conditions géométriques.

Exemples. I. Écrivons que la droite passe par un point de coordonnées a et b; on a

$$ua + vb + w = 0.$$

II. Assujettissons la droite à être à une distance donnée d d'un point qui a pour coordonnées a et b; il vient

$$\frac{ua + vb + w}{\sqrt{u^2 + v^2}} = d$$

ou

$$(ua + vb + w)^2 - d^2(u^2 + v^2) = 0.$$

III. On sait que pour que la droite soit tangente à une conique qui a pour équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui peut s'écrire, en développant,

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0,$$

les quantités a, b, c, etc. désignant les coefficients des lettres correspondantes, A, B, C, etc. dans le développement du discriminant

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

2. On peut remarquer que les relations obtenues sont homogènes par rapport à u, v, w. Nous allons démontrer qu'il en est toujours ainsi, c'est à-dire que *toute relation qui est la traduction analytique d'une condition géométrique, est nécessairement homogène en* u, v, w.

En effet, la droite ne change pas si on remplace dans son équation u, v, w respectivement par λu, λv, λw, λ désignant un nombre quelconque ; par conséquent, comme la droite satisfait à la condition géométrique quelle que soit la forme sous laquelle on écrit son équation, toute solution u, v, w de la relation correspondante entraîne la solution λu, λv, λw quel que soit λ ; la relation considérée est donc homogène.

3. Une droite sera donc bien déterminée analytiquement par deux relations homogènes entre ses coefficients. Si ces deux

relations sont algébriques, entières, de degrés m et p, le nombre de solutions sera mp, d'après le théorème de Bezout.

4. Si maintenant on donne une seule relation, toujours homogène en u, v, w,

$$f(u, v, w) = 0, \tag{1}$$

il y aura une infinité de droites dont les coefficients vérifieront l'équation (1); nous démontrerons plus tard qu'en général toutes ces droites sont tangentes à une même courbe.

On dira que l'équation (1) est *l'équation tangentielle* de la courbe, et pour éviter toute confusion la relation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées d'un point pour que ce point soit sur la courbe sera appelée *l'équation ponctuelle* de la courbe.

De même nous dirons que les coefficients u, v, w de l'équation d'une droite sont les *coordonnées tangentielles* de cette droite, tandis que les coordonnées d'un point seront appelées *coordonnées ponctuelles*.

Ainsi, par exemple, l'axe des x a pour *coordonnées tangentielles* 0, 1, 0, puisque son équation est

$$y = 0;$$

les coordonnées de l'axe des y seront 1, 0, 0; celles de la droite de l'infini, 0, 0, 1, etc.

Nous remarquerons aussi qu'étant donnée une droite, ses coordonnées tangentielles sont déterminées à un facteur constant près.

Nous allons maintenant examiner le cas où la relation (1) est du premier degré en u, v, w.

5. **Équation du Point.** Théorème. — *Toute équation homogène et du premier degré par rapport à u, v, w représente un point.*

Soit l'équation

$$au + bv + cw = 0. \tag{2}$$

On voit immédiatement que toutes les droites dont les coordonnées satisfont à cette équation passent par le point qui a pour coordonnées homogènes a, b, c.

L'équation (2) sera dite *l'équation tangentielle* du point.

Il est à peine utile de faire observer que, réciproquement, tout point peut être représenté par une équation du premier degré ; autrement dit, en écrivant qu'une droite passe par un point, on a une relation du premier degré entre les coefficients de la droite.

On peut donc dire que

L'équation tangentielle d'un point est la condition à laquelle doivent satisfaire les coordonnées d'une droite pour que cette droite passe par le point,

de même que

L'équation ponctuelle d'une droite est la condition à laquelle doivent satisfaire les coordonnées d'un point pour que ce point soit sur la droite.

Exemples. — L'origine des coordonnées a pour équation

$$w = 0;$$

un point sur l'axe des x, ayant pour abscisse a, sera représenté par l'équation

$$ua + w = 0.$$

6. Le point représenté par l'équation (2) n'est à distance finie que si le coefficient de w, c, est différent de zéro ; les coordonnées absolues de ce point sont $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$.

Si $c = 0$, on voit que toutes les droites dont les coordonnées satisfont à l'équation (2) sont parallèles à la droite qui joint l'origine au point de coordonnées a et b ; on peut donc dire que toutes ces droites passent par le point à l'infini dont les coordonnées homogènes sont a, b, 0.

Ainsi, $u = 0$ est l'équation du point à l'infini dans la direction de Ox; $v = 0$ est celle du point à l'infini dans la direction de Oy.

7. Exercice. — *Trouver les équations des points à l'infini dans les directions perpendiculaires aux axes de coordonnées, ces axes faisant l'angle* θ.

L'équation de la perpendiculaire à Ox menée par le point O

étant

$$x + y \cos \theta = 0,$$

on voit que les paramètres directeurs [1] de cette direction sont $\cos \theta$ et -1 ; par conséquent en exprimant qu'une droite passe par le point à l'infini de coordonnées homogènes $\cos \theta$, -1, 0, on aura

$$u \cos \theta - v = 0.$$

On trouve de même que l'équation du point à l'infini sur la perpendiculaire à Oy est

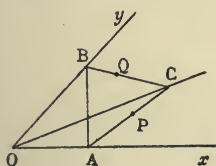
$$u - v \cos \theta = 0.$$

8. **Reconnaître si une droite variable passe par un point fixe.** — Dans un grand nombre de cas on peut simplement résoudre la question en se donnant les coordonnées de la droite u, v, w, puis écrivant les conditions auxquelles est assujettie cette droite. On arrive alors à une relation entre u, v, w et certaines quantités constantes, et il suffit de constater que la relation obtenue est du premier degré en u, v, w.

Voici une application très simple de cette méthode à un problème bien connu.

9. **Exercice.** — *Les trois sommets d'un triangle décrivent trois droites concourantes et deux côtés passent par deux points fixes. Démontrer que le troisième côté passe par un point fixe en ligne droite avec les deux premiers.*

Prenons pour axes deux des droites données ; soit $y = mx$ l'équation de la troisième et (x', y'), (x'', y'') les coordonnées des points fixes P et Q.



Désignons par

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation de la droite AB ; les droites AC et BC ont respectivement pour équations

(1) On appelle paramètres directeurs d'une direction les coordonnées d'un point quelconque situé sur la parallèle à cette direction menée par l'origine.

Ainsi les paramètres directeurs de la droite

$$ux + vy + w = 0$$

sont, à un facteur constant près, v et $-u$.

$$\frac{ux + vy + w}{ux' + vy' + w} = \frac{y}{y'},$$

$$\frac{ux + vy + w}{ux'' + vy'' + w} = \frac{x}{x''}.$$

Je forme l'équation de la droite joignant l'origine au point de rencontre de ces deux droites, ce qui donne

$$\frac{y}{y'}(ux' + vy' + w) = \frac{x}{x''}(ux'' + vy'' + w),$$

et j'écris que cette droite a pour coefficient angulaire m. On a ainsi

$$mx''(ux' + vy' + w) - y'(ux'' + vy'' + w) = 0.$$

Cette relation étant du premier degré en u, v, w, exprime que la droite passe par un point fixe. On voit de plus que ce point est situé sur la droite PQ, car les coordonnées de cette droite annulent $ux' + vy' + w$ et $ux'' + vy'' + w$; elles vérifient donc l'équation qui précède.

10. Équation du point d'intersection de deux droites. — Soient $\Delta_1(u_1, v_1, w_1)$ et $\Delta_2(u_2, v_2, w_2)$ les deux droites données ; d'après la définition de l'équation du point, il nous faut trouver la condition pour qu'une droite quelconque (u, v, w) passe par le point de rencontre de Δ_1 et Δ_2. On sait que cette condition peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0; \tag{3}$$

c'est l'équation cherchée.

En la développant, on obtient

$$u(v_1w_2 - w_1v_2) + v(w_1u_2 - u_1w_2) + w(u_1v_2 - v_1u_2) = 0,$$

et nous voyons que les coordonnées homogènes du point de rencontre des deux droites sont $v_1w_2 - w_1v_2$, $w_1u_2 - u_1w_2$, $u_1v_2 - v_1u_2$. Ce point est à l'infini si $u_1v_2 - v_1u_2 = 0$; on retrouve ainsi la condition de parallélisme de deux droites.

11. De l'équation (3) on peut déduire comme il suit les coordonnées d'une droite quelconque passant par l'intersection de Δ_1 et de Δ_2. Le déterminant étant nul, il existe entre les élé-

ments des colonnes une même relation linéaire et homogène, soit

$$Au + Bu_1 + Cu_2 = 0,$$

$$Av + Bv_1 + Cv_2 = 0,$$

$$Aw + Bw_1 + Cw_2 = 0.$$

Le coefficient A n'est pas nul, car s'il était nul, u_1, v_1, w_1 seraient proportionnels à u_2, v_2, w_2, et les deux droites Δ_1 et Δ_2 coïncideraient.

Nous pouvons donc résoudre les relations précédentes par rapport à u, v, w, et l'on a

$$u = \lambda u_1 + \mu u_2,$$

$$v = \lambda v_1 + \mu v_2,$$

$$w = \lambda w_1 + \mu w_2.$$

En faisant varier λ et μ de toutes les façons possibles, on obtient les coordonnées de toutes les droites passant par l'intersection des deux droites données.

Ce résultat est d'ailleurs une conséquence immédiate d'une propriété établie en géométrie analytique. On sait que l'équation générale des droites passant par l'intersection des deux droites qui ont pour équations

$$P_1 = u_1x + v_1y + w_1 = 0,$$

$$P_2 = u_2x + v_2y + w_2 = 0$$

est

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = 0,$$

et, d'après la définition, les coordonnées de la droite représentée par cette équation sont $\lambda u_1 + \mu u_2$, $\lambda v_1 + \mu v_2$, $\lambda w_1 + \mu w_2$.

12. Exercice. — *Etant donné un système de valeurs de λ et de μ, reconnaître si la droite correspondante qui a pour coordonnées $\lambda u_1 + \mu u_2$, $\lambda v_1 + \mu v_2$, $\lambda w_1 + \mu w_2$ est située dans l'angle aigu ou dans l'angle obtus des deux droites* Δ_1 et Δ_2.

Soit A un point quelconque du plan; par ce point je mène une perpendiculaire à la droite Δ_1; cette perpendiculaire rencontre Δ_1 au point B_1 et Δ_2 au point B_2. Il est clair que si les

deux points B_1 et B_2 sont de part et d'autre du point A, ce point est dans l'angle aigu des deux droites Δ_1 et Δ_2; si, au contraire, les deux points B_1 et B_2 sont d'un même côté du point A, ce point est dans l'angle obtus formé par Δ_1 et Δ_2. Nous nous appuierons sur cette propriété pour résoudre la question.

Soient x', y' les coordonnées du point A; l'équation de la perpendiculaire menée par ce point à la droite Δ_1 est, θ désignant l'angle des axes,

$$\frac{x - x'}{u_1 - v_1 \cos\theta} = \frac{y - y'}{v_1 - u_1 \cos\theta},$$

et les coordonnées d'un point quelconque de cette perpendiculaire ont pour expression

$$\begin{aligned} x &= x' + \rho(u_1 - v_1 \cos\theta), \\ y &= y' + \rho(v_1 - u_1 \cos\theta), \end{aligned} \qquad (4)$$

ρ étant proportionnel au segment qui a pour origine le point A et pour extrémité le point (x, y).

On aura les valeurs de ρ, ρ_1 et ρ_2, relatives aux points B_1 et B_2, en écrivant que les expressions (4) de x et de y satisfont aux équations des droites Δ_1 et Δ_2. On trouve ainsi

$$\rho_1 = -\frac{u_1 x' + v_1 y' + w_1}{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos\theta},$$

$$\rho_2 = -\frac{u_2 x' + v_2 y' + w_2}{u_1 u_2 + v_1 v_2 - (u_1 v_2 + u_2 v_1)\cos\theta}.$$

L'expression $u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos\theta$ étant toujours positive, le produit $\rho_1\rho_2$ aura le signe de

$$E = (u_1 x' + v_1 y' + w_1)(u_2 x' + v_2 y' + w_2)[u_1 u_2 + v_1 v_2 - (u_1 v_2 + u_2 v_1)\cos\theta].$$

Si cette expression est positive, ρ_1 et ρ_2 sont de même signe, les deux points B_1 et B_2 sont d'un même côté du point A, ce point est donc dans l'angle obtus des droites Δ_1 et Δ_2. Si, au contraire, l'expression E est négative, le point A est dans l'angle aigu.

Supposons maintenant que le point A soit situé sur la

droite Δ qui passe par l'intersection de Δ_1 et de Δ_2 et qui a pour coordonnées $\lambda u_1 + \mu u_2$, $\lambda v_1 + \mu v_2$, $\lambda w_1 + \mu w_2$; on aura

$$(\lambda u_1 + \mu u_2)x' + (\lambda v_1 + \mu v_2)y' + (\lambda w_1 + \mu w_2) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{u_2 x' + v_2 y' + w_2}{u_1 x' + v_1 y' + w_1};$$

ce qui montre que le produit

$$(u_1 x' + v_1 y' + w_1)(u_2 x' + v_2 y' + w_2)$$

a le signe de $-\lambda\mu$. Alors l'expression E aura le signe de

$$-\lambda\mu[u_1 u_2 + v_1 v_2 - (u_1 v_2 + u_2 v_1)\cos\theta],$$

et la réponse à la question proposée est la suivante :

Si $\lambda\mu[u_1 u_2 + v_1 v_2 - (u_1 v_2 + u_2 v_1)\cos\theta] > 0$, la droite Δ traverse l'angle aigu des deux droites Δ_1, Δ_2 ;

Si $\lambda\mu[u_1 u_2 + v_1 v_2 - (u_1 v_2 + u_2 v_1)\cos\theta] < 0$, la droite Δ traverse l'angle obtus.

Nous remarquerons que dans tout ce qui précède nous avons supposé

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - (u_1 v_2 + u_2 v_1)\cos\theta \neq 0,$$

ce qui revient à supposer que les deux droites ne sont pas perpendiculaires.

La droite Δ ne change pas quand λ et μ varient de telle manière que le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ reste le même. La position de la droite ne dépend donc que de la valeur de ce rapport. Les considérations qui précèdent prouvent que si le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ varie en conservant un signe constant la droite Δ se déplace dans le même angle, et si ce rapport change de signe la droite Δ passe dans l'autre angle.

13. Nous obtenons ainsi une interprétation géométrique du signe du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$; on peut également chercher une interprétation de la valeur absolue de ce rapport.

Nous allons démontrer que *la valeur absolue de ce rapport est proportionnelle au rapport des sinus des angles que fait la droite* Δ *avec les droites* Δ_2 *et* Δ_1.

Soit S le point de rencontre de Δ_1 et Δ_2; d'un point A (x', y') pris sur Δ abaissons les perpendiculaires AP_1 et AP_2 sur Δ_1 et Δ_2.

On a

$$AP_1 = SA \sin \Delta S \Delta_1,$$
$$AP_2 = SA \sin \Delta S \Delta_2,$$

d'où

$$\frac{AP_1}{AP_2} = \frac{\sin \Delta S \Delta_1}{\sin \Delta S \Delta_2}.$$

Or

$$AP_1 = \frac{(u_1 x' + v_1 y' + w_1) \sin \theta}{\pm \sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos \theta}},$$

$$AP_2 = \frac{(u_2 x' + v_2 y' + w_2) \sin \theta}{\pm \sqrt{u_2^2 + v_2^2 - 2u_2 v_2 \cos \theta}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{AP_1}{AP_2} = \pm \frac{u_1 x' + v_1 y' + w_1}{u_2 x' + v_2 y' + w_2} \sqrt{\frac{u_2^2 + v_2^2 - 2u_2 v_2 \cos \theta}{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos \theta}};$$

mais comme le point A est sur la droite Δ, on a

$$\frac{u_1 x' + v_1 y' + w_1}{u_2 x' + v_2 y' + w_2} = -\frac{\mu}{\lambda};$$

en conséquence

$$\frac{AP_1}{AP_2} = \pm \frac{\mu}{\lambda} \sqrt{\frac{u_2^2 + v_2^2 - 2u_2 v_2 \cos \theta}{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos \theta}}.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\sqrt{\frac{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos \theta}{u_2^2 + v_2^2 - 2u_2 v_2 \cos \theta}} = k;$$

on voit que

$$\frac{AP_2}{AP_1} = \left|\frac{\lambda}{\mu}\right| \cdot k,$$

$\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|$ désignant la valeur absolue de $\frac{\lambda}{\mu}$, et par suite

$$\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sin \Delta S \Delta_2}{\sin \Delta S \Delta_1}.$$

Le second membre de cette relation ne présente aucune ambiguïté, car l'angle $\Delta S \Delta_1$ par exemple a deux valeurs supplémentaires qui ont même sinus.

14. Considérons maintenant une seconde droite Δ' passant par l'intersection de Δ_1 et de Δ_2 et ayant pour coordonnées $\lambda' u_1 + \mu' u_2$, $\lambda' v_1 + \mu' v_2$ et $\lambda' w_1 + \mu' w_2$.

On aura comme plus haut

$$\left|\frac{\lambda'}{\mu'}\right| = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sin \Delta' S \Delta_2}{\sin \Delta' S \Delta_1};$$

en divisant membre à membre les deux dernières égalités, on obtient

$$\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| : \left|\frac{\lambda'}{\mu'}\right| = \frac{\sin \Delta S \Delta_2}{\sin \Delta S \Delta_1} : \frac{\sin \Delta' S \Delta_2}{\sin \Delta' S \Delta_1}.$$

Or le second membre est égal en valeur absolue à l'un des rapports anharmoniques du faisceau des quatre droites Δ_1, Δ_2, Δ, Δ'. D'autre part ce rapport anharmonique est positif si les deux droites Δ et Δ' sont dans le même angle des deux droites Δ_1 et Δ_2 et négatif dans le cas contraire. Mais dans le premier cas $\frac{\lambda}{\mu}$ et $\frac{\lambda'}{\mu'}$ sont de même signe, dans le deuxième cas de signe contraire ; on aura donc, en désignant par $(\Delta \Delta' \Delta_1 \Delta_2)$ le rapport anharmonique en grandeur et en signe,

$$(\Delta \Delta' \Delta_1 \Delta_2) = \frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda'}{\mu'}.$$

Dans le cas particulier où $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\lambda'}{\mu'}$, les droites Δ et Δ' sont conjuguées harmoniques par rapport à Δ_1 et Δ_2.

15. Droite passant par deux points. — Soient

$$au + bv + cw = 0,$$
$$a'u + b'v + c'w = 0$$

les équations des deux points donnés ; les coordonnées de la droite qui joint ces deux points s'obtiendront en résolvant les

deux équations par rapport à u, v, w; on obtient ainsi

$$u = \lambda(bc' - cb'), \qquad v = \lambda(ca' - ac'), \qquad w = \lambda(ab' - ba'),$$

en supposant que les équations soient distinctes, c'est-à-dire représentent deux points différents.

Quelle que soit la valeur de λ, ces solutions ne définissent qu'une seule droite.

16. Condition pour que trois points soient en ligne droite. — Soient

$$au + bv + cw = 0,$$

$$a'u + b'v + c'w = 0,$$

$$a''u + b''v + c''w = 0$$

les équations des trois points donnés; pour que ces points soient en ligne droite, il faut qu'il existe un système de valeurs de u, v, w non toutes nulles satisfaisant aux trois équations précédentes; la condition cherchée est donc

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

17. Équation générale des points situés sur une droite. — Supposons que la droite soit définie par deux de ses points A et A′, ayant respectivement pour équations

$$P = au + bv + cw = 0,$$

$$P' = a'u + b'v + c'w = 0.$$

Nous allons démontrer que l'équation générale des points situés sur cette droite est

$$\lambda P + \mu P' = 0, \tag{5}$$

λ et μ désignant des nombres quelconques.

Remarquons en premier lieu que quels que soient λ et μ, l'équation (5) représente un point situé sur la droite AA′. En effet, les coordonnées de cette droite annulant P et P′, annulent $\lambda P + \mu P'$, et par suite vérifient l'équation (5).

En second lieu, il faut établir qu'on peut disposer de λ et de μ en sorte que l'équation représente un point arbitrairement choisi sur la droite AA'.

Soit M un point quelconque de cette droite ; menons par le point M une droite ayant pour coordonnées u_1, v_1, w_1, et déterminons λ et μ en sorte que l'équation (5) soit satisfaite par ces coordonnées ; on aura

$$\lambda P_1 + \mu P_1' = 0,$$

P_1 et P_1' désignant respectivement ce que deviennent P et P' quand on y remplace u, v, w par u_1, v_1, w_1. On déduit de cette relation

$$\lambda = P_1', \qquad \mu = -P_1,$$

et en transportant dans l'équation (5), on a

$$P_1'P - P_1P' = 0,$$

équation qui représente un point situé sur la droite AA' et sur la droite u_1, v_1, w_1. Ce point est donc le point M, et la proposition est établie.

18. A l'aide des considérations qui précèdent, on peut obtenir d'une autre manière la condition pour que trois points soient en ligne droite.

Désignons par

$$P = au + bv + cw = 0,$$

$$P' = a'u + b'v + c'w = 0,$$

$$P'' = a''u + b''v + c''w = 0$$

les équations des trois points A, A', A''.

Si le point A'' est sur la droite AA', son équation peut s'écrire

$$\lambda P + \mu P' = 0;$$

cette équation représentant le même point que l'équation $P'' = 0$, leurs coefficients devront être proportionnels et on aura

$$\lambda P + \mu P' \equiv -\nu P''$$

ou

$$\lambda P + \mu P' + \nu P'' \equiv 0.$$

Réciproquement, s'il existe trois nombres λ, μ, ν tels que cette identité ait lieu, les trois points A, A′, A″ sont en ligne droite. On tire en effet de cette identité

$$-\nu P'' \equiv \lambda P + \mu P',$$

ce qui prouve que le point A″ est sur la droite AA′.

On peut donc dire que *la condition nécessaire et suffisante pour que les trois points soient en ligne droite, est qu'il existe trois nombres* λ, μ, ν *différents de zéro en sorte qu'on ait l'identité*

$$\lambda P + \mu P' + \nu P'' \equiv 0.$$

En développant cette identité, c'est-à-dire en écrivant que les coefficients de u, v, w sont nuls, on a

$$\lambda a + \mu a' + \nu a'' = 0,$$

$$\lambda b + \mu b' + \nu b'' = 0,$$

$$\lambda c + \mu c' + \nu c'' = 0,$$

d'où l'on déduit que le déterminant considéré au numéro 16 est nul.

19. Exercice. — *On donne deux droites, trois points* A, A′, A″ *sur l'une de ces droites et trois points* B, B′, B″ *sur l'autre. Les droites* A′B″ *et* A″B′ *se coupent au point* C, A″B *et* AB″ *au point* C′, AB′ *et* A′B *au point* C″. *Démontrer que les points* C, C′, C″ *sont en ligne droite.*

Prenons la droite AA′A″ pour axe des x et la droite BB′B″ pour axe des y; désignons par a, a', a'' et b, b', b'' les abscisses et ordonnées de ces six points.

La droite A′B″ a pour coordonnées $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b''}$ et -1; A″B′ a pour coordonnées $\frac{1}{a''}$, $\frac{1}{b'}$ et -1. L'équation du point C peut donc s'écrire (10)

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ \frac{1}{a'} & \frac{1}{b''} & -1 \\ \frac{1}{a''} & \frac{1}{b'} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant,

$$P = u\left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{b''}\right) + v\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a''}\right) + w\left(\frac{1}{a'b'} - \frac{1}{a''b''}\right) = 0.$$

On a de même pour les équations des points C′ et C″,

$$P' = u\left(\frac{1}{b''} - \frac{1}{b}\right) + v\left(\frac{1}{a''} - \frac{1}{a}\right) + w\left(\frac{1}{a''b''} - \frac{1}{ab}\right) = 0,$$

$$P'' = u\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right) + v\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right) + w\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{a'b'}\right) = 0.$$

Ajoutons membre à membre ces trois équations ; on voit que

$$P + P' + P'' \equiv 0,$$

donc les trois points sont en ligne droite.

20. Signe du premier membre de l'équation d'un point. — Le premier membre $au + bv + cw$ de l'équation d'un point s'annule pour les coordonnées d'une droite qui passe par ce point, mais il prend une valeur différente de zéro quand on y remplace u, v, w par les coordonnées d'une droite ne passant pas par le point. Nous nous proposons d'étudier le signe de cette valeur quand la droite se déplace dans le plan.

Une droite étant tracée, ses coordonnées ne sont déterminées qu'à un facteur près, de sorte que le signe de $au + bv + cw$ ne dépend pas de la position de la droite dans le plan, puisqu'en multipliant les coordonnées par un nombre convenable, l'expression considérée peut prendre le signe que l'on veut, la droite restant la même. En conséquence, pour qu'à une position de la droite on puisse faire correspondre sans ambiguïté un signe déterminé pour $au + bv + cw$, il est nécessaire de fixer à l'avance le signe d'une des coordonnées u, v, w.

Menons par le point considéré A (supposé à distance finie) une parallèle à Oy, et soient Ay_1 la portion de cette parallèle dirigée vers les y positifs et Ay'_1 la portion dirigée vers les y négatifs.

Soit maintenant une droite quelconque Δ ayant pour coordonnées u, v, w ; elle rencontre la droite $y_1y'_1$ en un point B qui a pour ordonnée

$$y_0 = -\frac{au + cw}{cv};$$

prenons la différence des ordonnées des points B et A ; on a

$$y_0 - \frac{b}{c} = -\frac{au + cw}{cv} - \frac{b}{c} = -\frac{au + bv + cw}{cv}.$$

Dès lors, suivant que l'ordonnée du point B est supérieure ou inférieure à celle du point A, le produit $(au + bv + cw)cv$ sera négatif ou positif.

On est donc conduit à la conclusion suivante :

En supposant $v \neq 0$, *l'expression* $au + bv + cw$ *a même signe que* cv *si la droite* (u, v, w) *rencontre la parallèle à* Oy *menée par le point* A *en un point situé sur la demi-droite* Ay'_1 ; *cette expression a le signe de* $-cv$ *si la droite* (u, v, w) *rencontre la parallèle sur la demi-droite* Ay_1.

Dans le cas où $v = 0$, c'est-à-dire où la droite est parallèle à Oy, on mènera par le point A une parallèle à Ox et on aura des conclusions analogues.

21. Bissectrices d'un angle. — Soient deux droites, $\Delta_1(u_1, v_1, w_1)$ et $\Delta_2(u_2, v_2, w_2)$. Les équations des bissectrices des angles formés par ces droites sont

$$\frac{(u_1x + v_1y + w_1)\sin\theta}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1\cos\theta}} + \varepsilon\frac{(u_2x + v_2y + w_2)\sin\theta}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 - 2u_2v_2\cos\theta}} = 0. \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

Posons

$$\rho_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1\cos\theta}, \qquad \rho_2 = \sqrt{u_2^2 + v_2^2 - 2u_2v_2\cos\theta};$$

on voit que les coordonnées de ces deux droites seront

$$\frac{u_1}{\rho_1} + \varepsilon\frac{u_2}{\rho_2}, \qquad \frac{v_1}{\rho_1} + \varepsilon\frac{v_2}{\rho_2}, \qquad \frac{w_1}{\rho_1} + \varepsilon\frac{w_2}{\rho_2}.$$

En donnant à ε le signe de $u_1u_2 + v_1v_2 - (u_1v_2 + u_2v_1)\cos\theta$, on aura la bissectrice de l'angle aigu (12) ; à l'autre valeur de ε correspondra la bissectrice de l'angle obtus.

22. Bissectrices des angles d'un triangle. — Soit le triangle ABC ; désignons par

$$P_1 = u_1x + v_1y + w_1 = 0,$$
$$P_2 = u_2x + v_2y + w_2 = 0,$$
$$P_3 = u_3x + v_3y + w_3 = 0$$

les équations des côtés BC, CA et AB.

Les bissectrices des angles formés par les droites AB et AC ont pour coordonnées

$$\frac{u_2}{\rho_2} + \varepsilon \frac{u_3}{\rho_3}, \qquad \frac{v_2}{\rho_2} + \varepsilon \frac{v_3}{\rho_3}, \qquad \frac{w_2}{\rho_2} + \varepsilon \frac{w_3}{\rho_3},$$

en adoptant les mêmes notations que dans le numéro précédent.

Il nous faut maintenant déterminer la valeur de ε qui correspond à la bissectrice de l'angle A du triangle.

Pour cela, menons par le point A une parallèle AD au côté BC; les coordonnées de cette droite seront de la forme $\lambda u_2 + \mu u_3$, $\lambda v_2 + \mu v_3$, $\lambda w_2 + \mu w_3$, avec la condition

$$\frac{\lambda u_2 + \mu u_3}{u_1} = \frac{\lambda v_2 + \mu v_3}{v_1}$$

ou

$$\lambda[u_1 v_2 - u_2 v_1] = \mu[u_3 v_1 - u_1 v_3].$$

On peut prendre

$$\lambda = u_3 v_1 - u_1 v_3, \qquad \mu = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Or la bissectrice de l'angle A du triangle et la droite AD sont dans des angles différents par rapport aux droites AB et AC. En vertu d'une remarque faite à la fin du numéro 12, cette bissectrice s'obtiendra en donnant à ε, dans les expressions qui précèdent, le signe de $-\frac{\lambda}{\mu}$, c'est-à-dire de $\frac{u_1 v_3 - u_3 v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$.

On aura de même les bissectrices des autres angles du triangle.

On peut établir sans peine que ces trois bissectrices concourent en un même point.

Les équations de ces bissectrices peuvent s'écrire

$$\frac{P_2}{\rho_2} + \varepsilon \frac{P_3}{\rho_3} = 0,$$

$$\frac{P_3}{\rho_3} + \varepsilon' \frac{P_1}{\rho_1} = 0,$$

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \varepsilon'' \frac{P_2}{\rho_2} = 0,$$

ε, ε' et ε'' étant égaux à ± 1 et ayant respectivement le signe de

$$\frac{u_1v_3 - u_3v_1}{u_1v_2 - u_2v_1}, \quad \frac{u_2v_1 - u_1v_2}{u_2v_3 - u_3v_2} \quad \text{et} \quad \frac{u_3v_2 - u_2v_3}{u_3v_1 - u_1v_3},$$

de telle sorte que

$$\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = -1.$$

Multiplions respectivement les équations des bissectrices par 1, $-\varepsilon$, $\varepsilon\varepsilon'$ et ajoutons, on a une identité ; donc les trois droites passent par un même point.

23. Équation de l'ensemble de deux points. — Si le premier membre d'une équation homogène de degré n par rapport à u, v, w se décompose en un produit de n facteurs linéaires, l'équation représente n points dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro les facteurs linéaires.

Par exemple, si l'équation ne renferme que u et w, le premier membre sera développable en un produit de facteurs binomes tels que $ua + wc$, et par suite l'équation représentera un certain nombre de points situés sur Ox.

De même toute équation qui ne renferme que v et w représente un ensemble de points situés sur Oy.

Nous allons considérer une équation du deuxième degré,

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0, \quad (6)$$

et supposer que le premier membre est décomposable en un produit de deux facteurs, c'est-à-dire que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} = 0.$$

On a alors une identité de la forme

$$f(u, v, w) \equiv (u\alpha + v\beta + w\gamma)(u\alpha' + v\beta' + w\gamma');$$

l'équation représente les deux points qui ont respectivement pour coordonnées homogènes α, β, γ et α', β', γ'.

On déduit de cette identité

$$\left.\begin{array}{lll} a = \alpha\alpha', & a' = \beta\beta', & a'' = \gamma\gamma', \\ 2b = \beta\gamma' + \gamma\beta', & 2b' = \gamma\alpha' + \alpha\gamma', & 2b'' = \alpha\beta' + \beta\alpha'. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Si $a'' \neq 0$, les deux points sont à distance finie.

24. Si tous les mineurs du discriminant Δ ne sont pas nuls, $f(u, v, w)$ est décomposable en un produit de deux facteurs distincts,

$$f(u, v, w) \equiv \mathrm{P}.\mathrm{Q},$$

en posant

$$\mathrm{P} = u\alpha + v\beta + w\gamma, \qquad \mathrm{Q} = u\alpha' + v\beta' + w\gamma'.$$

En prenant les dérivées partielles, on a

$$f'_u = \alpha\mathrm{Q} + \alpha'\mathrm{P},$$

$$f'_v = \beta\mathrm{Q} + \beta'\mathrm{P},$$

$$f'_w = \gamma\mathrm{Q} + \gamma'\mathrm{P},$$

ce qui montre que les trois équations

$$f'_u = 0, \qquad f'_v = 0, \qquad f'_w = 0$$

ont un seul système de solutions ; ce sont les coordonnées de la droite qui passe par les points P et Q.

Si au contraire tous les mineurs de Δ sont nuls, $f(u, v, w)$ est carré parfait, l'équation (6) représente un point double, les dérivées partielles f'_u, f'_v, f'_w sont proportionnelles, et en les égalant à zéro, on a un système d'équations vérifiées par une droite quelconque passant par le point double.

25. Dans ce qui suivra, nous désignerons selon l'usage par A, A′, A″, B, B′, B″ les coefficients des petites lettres correspondantes dans le développement de Δ ; on aura alors

$$\begin{array}{ll} \mathrm{A} = a'a'' - b^2, & \mathrm{B} = b'b'' - ab, \\ \mathrm{A}' = a''a - b'^2, & \mathrm{B}' = b''b - a'b', \\ \mathrm{A}'' = aa' - b''^2, & \mathrm{B}'' = bb' - a''b''. \end{array}$$

On sait que l'on a également les formules

$$A'A'' - B^2 = a\Delta, \qquad B'B'' - AB = b\Delta,$$
$$A''A - B'^2 = a'\Delta, \qquad B''B - A'B' = b'\Delta,$$
$$AA' - B''^2 = a''\Delta, \qquad BB' - A''B'' = b''\Delta.$$

Si Δ est nul, comme nous le supposons ici, les trois nombres A, A′, A″ sont de même signe.

Supposons maintenant que les deux points soient à distance finie, c'est-à-dire $a'' \neq 0$, et proposons-nous de déterminer dans quel cas ils sont réels.

On peut écrire

$$f(u, v, w) = \frac{1}{a''}(a''w + bv + b'u)^2 - \frac{(bv + b'u)^2}{a''} + au^2 + a'v^2 + 2b''uv,$$
$$a''f(u, v, w) = (a''w + bv + b'u)^2 + A'u^2 - 2B''uv + Av^2.$$

Les deux nombres A et A′ ne peuvent être nuls en même temps, car la relation

$$AA' - B''^2 = a''\Delta = 0$$

entraînerait $B'' = 0$; $f(u, v, w)$ serait alors carré parfait et les deux points seraient confondus.

Supposons $A' \neq 0$; on aura

$$a''f(u, v, w) = (a''w + bv + b'u)^2 + \frac{1}{A'}(A'u - B''v)^2.$$

On voit alors que si $A' < 0$, $f(u, v, w)$ est décomposable en un produit de deux facteurs réels, l'équation représente deux points réels.

Si $A' > 0$, elle représente deux points imaginaires.

Supposons maintenant $a'' = 0$; on peut écrire

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + 2b''uv + 2w(bv + b'u),$$

et comme on a

$$\Delta = -ab^2 - a'b'^2 + 2bb'b'' = 0,$$

on voit que $bv + b'u$ divise $au^2 + a'v^2 + 2b''uv$, car en remplaçant dans cette dernière expression u par b et v par $-b'$, on obtient

$$ab^2 + a'b'^2 - 2bb'b'' = -\Delta = 0.$$

Si donc b et b' ne sont pas nuls en même temps, l'équation représente deux points réels dont l'un est à l'infini.

Enfin si $b = b' = 0$, l'équation se réduit à

$$au^2 + a'v^2 + 2b''uv = 0\,;$$

elle représente deux points à l'infini, réels, imaginaires ou confondus, selon que $aa' - b''^2$ ou A'' est négatif, positif ou nul [1].

Il résulte de là que si l'un des trois nombres de même signe, A, A', A'', est différent de zéro, l'équation représente deux points distincts, réels si ce nombre est négatif et imaginaires dans le cas contraire.

Si les trois nombres A, A', A'' sont nuls, tous les mineurs du discriminant sont nuls et l'équation représente un point double.

En résumé :

$A + A' + A'' < 0$;	l'équation	représente	deux points réels ;
$A + A' + A'' > 0$;	—	—	deux points imaginaires ;
$A + A' + A'' = 0$;	—	—	un point double.

26. Cherchons maintenant l'équation de la droite qui joint ces deux points.

Cette équation peut s'écrire

$$x(\beta\gamma' - \gamma\beta') + y(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') + z(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0.$$

Pour pouvoir exprimer les coefficients en fonction de a, a', ..., multiplions le premier membre par $\beta\gamma' - \gamma\beta'$ et remarquons que

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 = (\beta\gamma' + \gamma\beta')^2 - 4\beta\beta'\gamma\gamma' = 4(b^2 - a'a'') = -4A,$$

$$\begin{aligned}(\beta\gamma' - \gamma\beta')(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') &= 2\gamma\gamma'(\alpha\beta' + \beta\alpha') - (\beta\gamma' + \gamma\beta')(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') \\ &= 4(a''b'' - bb') = -4B'',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\beta\gamma' - \gamma\beta')(\alpha\beta' - \beta\alpha') &= 2\beta\beta'(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') - (\beta\gamma' + \gamma\beta')(\alpha\beta' + \beta\alpha') \\ &= 4(a'b' - b''b) = -4B'.\end{aligned}$$

---

(1) On trouvera le tableau résumant cette discussion au numéro 98.

L'équation de la droite peut donc s'écrire

$$Ax + B''y + B'z = 0.$$

En multipliant de même le premier membre de l'équation de la droite par $\gamma\alpha' - \alpha\gamma'$, puis par $\alpha\beta' - \beta\alpha'$, on obtient successivement pour équation de la même droite

$$B''x + A'y + Bz = 0,$$
$$B'x + By + A''z = 0.$$

Les premiers membres de ces équations sont les demi-dérivées partielles de la fonction

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

qui est ce qu'on appelle la *forme adjointe* de $f(u, v, w)$.

Comme ces trois dérivées sont proportionnelles, cette forme est carré parfait [1], et en égalant sa racine à zéro on obtient l'équation de la droite qui joint les deux points.

Si donc on désigne par u', v', w' les coordonnées de cette droite, on aura l'identité

$$\lambda\varphi(x, y, z) \equiv (u'x + v'y + w'z)^2,$$

d'où l'on déduit

$$u'^2 = \lambda A, \qquad v'^2 = \lambda A', \qquad w'^2 = \lambda A'',$$
$$v'w' = \lambda B, \qquad w'u' = \lambda B', \qquad u'v' = \lambda B''.$$

27. On peut obtenir ce résultat par un autre procédé plus simple.

Désignons par P et Q les deux points représentés par l'équation (6) ; joignons ces deux points à un point quelconque $M(x, y, z)$ du plan ; les coordonnées des droites MP et MQ satisferont aux deux équations

$$f(u, v, w) = 0,$$
$$ux + vy + wz = 0.$$

---

(1) Cela résulte aussi de ce que les mineurs du discriminant de cette forme sont nuls, d'après les formules du numéro 25 où l'on suppose $\Delta = 0$.

Ces équations admettent en général deux systèmes de solutions ; si l'on écrit que ces deux systèmes sont les mêmes, on aura la condition pour que le point M soit sur la droite PQ, c'est-à-dire l'équation de cette droite.

De la deuxième équation, tirons la valeur de w en supposant $z \neq 0$, et transportons dans la première ; on obtient, en ordonnant par rapport à u,

$$u^2(az^2 - 2b'zx + a''x^2) + 2uv(b''z^2 - bzx - b'yz + a''xy) + v^2(a'z^2 - 2byz + a''y^2) = 0,$$

et pour que cette équation admette une racine double, il faut qu'on ait

$$(az^2 - 2b'zx + a''x^2)(a'z^2 - 2byz + a''y^2) - (b''z^2 - bzx - b'yz + a''xy)^2 = 0 ;$$

développons, supprimons le facteur z^2 qui n'est pas nul ; il reste

$$(a'a'' - b^2)x^2 + (a''a - b'^2)y^2 + (aa' - b''^2)z^2 + 2(b'b'' - ab)yz + 2(b''b - a'b')zx + 2(bb' - a''b'')xy = 0$$

ou

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

Le premier membre est carré parfait en vertu des formules du numéro 25 ; sa racine donne le premier membre de l'équation de la droite PQ.

28. Pôle d'une droite par rapport à un système de deux points. — Soient P et Q les deux points donnés et Δ la droite. Cette droite rencontre PQ en un point H, et le conjugué harmonique de H par rapport à P et Q est par définition le pôle de la droite Δ par rapport aux points P et Q.

Connaissant l'équation

$$f(u, v, w) = 0$$

de l'ensemble des points P et Q, et les coordonnées u_0, v_0, w_0 de la droite Δ, nous allons former l'équation du pôle de cette droite.

Considérons pour cela une droite quelconque D, de coor-

données u, v, w, qui rencontre Δ en un point M ; toute droite passant par le point M a des coordonnées de la forme $\lambda u + \mu u_0$, $\lambda v + \mu v_0$, $\lambda w + \mu w_0$, et les valeurs de λ et de μ correspondant aux droites MP et MQ seront racines de l'équation

$$f(\lambda u + \mu u_0, \quad \lambda v + \mu v_0, \quad \lambda w + \mu w_0) = 0$$

ou

$$\lambda^2 f(u, v, w) + \lambda\mu(u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0}) + \mu^2 f(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

Pour que la droite D passe par le pôle de la droite Δ, il faut que MP et MQ soient conjuguées harmoniques par rapport à D et Δ, c'est-à-dire que les valeurs de $\frac{\lambda}{\mu}$ tirées de l'équation précédente soient égales et de signe contraire. On aura donc pour l'équation du pôle,

$$u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} = 0,$$

et par conséquent les coordonnées homogènes de ce pôle sont f'_{u_0}, f'_{v_0} et f'_{w_0}.

29. Dans le cas où les deux facteurs de $f(u, v, w)$ sont mis en évidence, si par exemple

$$f(u, v, w) \equiv PQ,$$

P et Q désignant des fonctions linéaires et homogènes de u, v, w, on verra sans peine que l'équation du pôle de la droite Δ est

$$\frac{P}{P_0} + \frac{Q}{Q_0} = 0,$$

P_0 et Q_0 désignant ce que deviennent P et Q quand on y remplace u, v, w respectivement par u_0, v_0, w_0.

30. Propriété du triangle. — *Soit un triangle* ABC ; *désignons par* A', B', C' *les pôles d'une droite* Δ *par rapport aux couples de points* (B, C), (C, A), (A, B) ; *les droites* AA', BB', CC' *concourent en un même point* H. *Si* A'', B'', C'' *désignent les points de rencontre de* Δ *avec les côtés* BC, CA, AB, *les droites* B'C', C'A', A'B' *passent respectivement par les points* A'', B'', C''. *Enfin, soient* A_1, B_1, C_1 *les points de rencontre des droites* BB'' *et* CC'', CC'' *et* AA'', AA'' *et* BB''; *les droites* AA_1, BB_1 *et* CC_1 *passent par le point* H.

Soient

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0$$

les équations des sommets A, B, C du triangle, et u_0, v_0, w_0 les coordonnées de la droite Δ.

L'équation du point A' est

$$\frac{Q}{Q_0} + \frac{R}{R_0} = 0;$$

par conséquent le point qui a pour équation

$$\frac{P}{P_0} + \frac{Q}{Q_0} + \frac{R}{R_0} = 0$$

est situé sur la droite AA', et comme son équation est symétrique par rapport à P, Q, R, ce point est aussi situé sur les droites BB' et CC' ; c'est le point H.

Les équations des points B' et C' sont

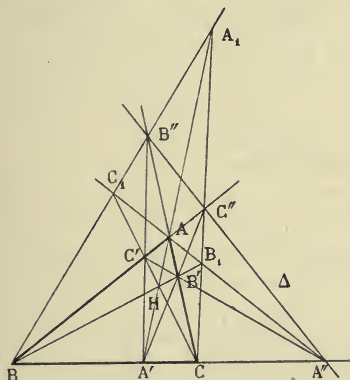
$$\frac{R}{R_0} + \frac{P}{P_0} = 0,$$

$$\frac{P}{P_0} + \frac{Q}{Q_0} = 0;$$

en les retranchant, on obtient

$$\frac{Q}{Q_0} - \frac{R}{R_0} = 0,$$

équation d'un point situé sur B'C' et aussi sur BC et sur la droite Δ ; il en résulte que B'C' passe par le point A''.



L'équation générale des points situés sur AA'' est alors

$$\lambda P + \frac{Q}{Q_0} - \frac{R}{R_0} = 0;$$

de même l'équation générale des points situés sur BB'' est

$$\mu Q + \frac{P}{P_0} - \frac{R}{R_0} = 0;$$

il en résulte que l'équation du point C_1, intersection des droites AA'' et BB'', est

$$\frac{P}{P_0} + \frac{Q}{Q_0} - \frac{R}{R_0} = 0;$$

et l'on voit immédiatement que la droite CC_1 passe par le point H, puisque tous les points de cette droite ont pour équation

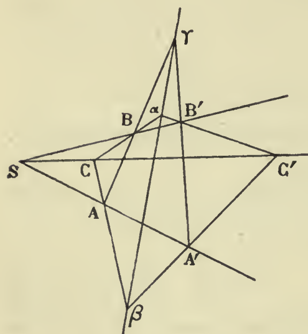
$$\lambda R + \frac{P}{P_0} + \frac{Q}{Q_0} - \frac{R}{R_0} = 0 ;$$

en y faisant $\lambda = \frac{2}{R_0}$, on obtient l'équation du point H.

On dit que la droite Δ est la polaire du point H par rapport au triangle ; les résultats qui précèdent donnent un moyen très simple de construire le point H connaissant la droite Δ, ou inversement.

EXERCICES ET NOTES

1. Triangles homologiques. — *Si deux triangles ont leurs sommets sur trois droites concourantes, les côtés correspondants se coupent en trois points en ligne droite, et réciproquement, si les côtés de deux triangles se coupent en trois points en ligne droite, les sommets correspondants sont deux à deux sur trois droites concourantes.*



Soient $S = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ les équations des points S, A, B, C.

Les points A′, B′, C′ auront pour équations

$$A' = S + aA = 0, \quad B' = S + bB = 0, \quad C' = S + cC = 0,$$

puisque ces points sont respectivement sur les droites SA, SB, SC.

Les points α, β, γ ont alors respectivement pour équations

$$bB - cC = 0, \quad cC - aA = 0, \quad aA - bB = 0 ;$$

ils sont en ligne droite.

Établir la réciproque par un procédé analogue.

2. *Si les n sommets d'un polygone décrivent des droites concourantes et si $n - 1$ côtés passent par $n - 1$ points fixes, le n^e côté passe par un point fixe, ainsi que les diagonales.*

3. *On considère toutes les coniques passant par deux points et tangentes à deux droites. Démontrer que la corde des contacts passe par un point fixe.*

Prenons pour axes les deux droites, x_0, y_0 et x_1, y_1 désignant les coordonnées des deux points.

L'équation générale des coniques sera

$$2\lambda xy + (ux + vy + w)^2 = 0.$$

Écrivons qu'elle passe par les deux points et éliminons λ ; on trouve

$$\frac{(ux_0 + vy_0 + w)^2}{x_0 y_0} = \frac{(ux_1 + vy_1 + w)^2}{x_1 y_1},$$

équation qui représente deux points, conjugués harmoniques par rapport aux deux points donnés.

La corde des contacts passe par l'un ou l'autre de ces points.

4. *Étant donné un quadrilatère, on détermine les pôles d'une droite par rapport aux trois systèmes de points, extrémités des trois diagonales ; démontrer que ces pôles sont en ligne droite. Cas où la droite est à l'infini.*

5. *Étant donnée une équation du deuxième degré,* $f(u, v, w) = 0$, *qui représente deux points, déterminer la distance de ces deux points.*

En conservant les notations des numéros 23 et suivants, le carré de cette distance est

$$\frac{(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 + (\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 - 2(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(\beta\gamma' - \gamma\beta')\cos\theta}{\gamma^2\gamma'^2},$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$-4 \cdot \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{a''^2}.$$

Déduire de là la condition de réalité des deux points.

6. *Trouver l'équation du cercle admettant pour diamètre la droite joignant les deux points représentés par l'équation* $f(u, v, w) = 0$.

7. *Étant donnée l'équation de deux points,* $f(u, v, w) = 0$, *interpréter la condition* $f(u, v, w) > 0$.

8. *Soit* ABCD *un quadrilatère et* Δ *une droite quelconque, soit* α *le pôle de* Δ *par rapport aux points* A *et* B, β *le pôle de cette même droite par rapport aux points* C *et* D ; *menons la droite* $\alpha\beta$; *faisons une construction analogue sur les côtés opposés* AC, BD *et sur les diagonales* AD, BC : *les trois droites obtenues passent par le même point.*

CHAPITRE II

GÉNÉRALITÉS SUR LES COURBES ET PRINCIPE DE DUALITÉ

---

31. Considérons maintenant une équation homogène, algébrique ou transcendante, entre les coordonnées u, v, w d'une droite,

$$f(u, v, w) = 0. \qquad (1)$$

Nous allons montrer que toutes les droites dont les coordonnées satisfont à cette équation sont en général tangentes à une certaine courbe que nous chercherons à déterminer.

Le problème revient à chercher l'enveloppe de la droite qui a pour équation

$$ux + vy + wz = 0 \qquad (2)$$

quand ses coefficients satisfont à l'équation (1).

Comme nous l'avons déjà dit, l'équation de la droite ne renferme que deux paramètres indépendants, lesquels sont liés par une relation ; nous sommes dans un cas particulier de la théorie générale des enveloppes. Il est bon de mettre en évidence les deux paramètres.

Remarquons pour cela que la droite dont on cherche le point limite[1] ne peut à la fois passer par l'origine et être parallèle aux deux axes ; nous pouvons donc supposer que l'un

---

(1) C'est-à-dire le point où la droite touche son enveloppe, ou encore la position limite du point de rencontre de cette droite avec la droite infiniment voisine.

des coefficients u, v, w est différent de zéro, par exemple $w \neq 0$; ce coefficient peut alors être considéré comme constant, il ne reste plus que les deux paramètres u et v ; on peut appliquer la méthode générale, le point limite est déterminé par l'équation (2) et l'équation suivante :

$$\frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v},$$

qui peut aussi s'écrire

$$\frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v} = \frac{ux + vy}{uf'_u + vf'_v} = \frac{-wz}{-wf'_w} = \frac{z}{f'_w}$$

ou

$$\frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v} = \frac{z}{f'_w}. \tag{3}$$

Si l'on supposait $u \neq 0$, il est clair qu'on obtiendrait les mêmes équations (3). On voit donc que dans tous les cas et quelle que soit la droite considérée dont les coordonnées satisfont à (1), le point limite de cette droite est déterminé par les équations (2) et (3).

On aura l'équation de l'enveloppe en éliminant u, v, w entre les équations (2) et (3).

Il est en effet inutile de se servir de l'équation (1), puisqu'elle se déduit des équations (3) en tenant compte de la relation (2).

On obtiendra ainsi une équation homogène en x, y, z, qui sera l'équation d'une courbe, et toutes les droites dont les coordonnées satisfont à l'équation (1) seront tangentes à cette courbe.

32. *Réciproquement*, étant donnée l'équation d'une courbe

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

on sait que les coordonnées des tangentes à cette courbe satisfont à une équation homogène en u, v, w. On obtient cette condition en éliminant x, y, z entre les équations

$$\frac{u}{\varphi'_x} = \frac{v}{\varphi'_y} = \frac{w}{\varphi'_z}$$

et

$$ux + vy + wz = 0.$$

33. Ainsi, à côté de l'équation d'une courbe, c'est-à-dire de la relation à laquelle satisfont les coordonnées de tous les points de cette courbe, vient se placer une nouvelle équation, non moins importante, entre les coordonnées des tangentes à cette courbe.

Nous appellerons cette dernière équation l'*équation tangentielle* de la courbe, et, pour éviter toute confusion, nous qualifierons de *ponctuelle* l'équation entre coordonnées de points que l'on considère au début de la géométrie analytique.

En résumé, l'*équation tangentielle* d'une courbe est la relation que doivent vérifier les coordonnées d'une droite pour que cette droite soit tangente à la courbe, de même que *l'équation ponctuelle* est la relation que doivent vérifier les coordonnées d'un point pour que ce point soit sur la courbe.

On déduit ces équations l'une de l'autre à l'aide des calculs indiqués plus haut ; on en constatera sans peine l'analogie complète.

On voit ainsi qu'une courbe est aussi bien déterminée par son équation tangentielle que par son équation ponctuelle.

34. **Classe d'une courbe.** — Supposons que l'équation tangentielle d'une courbe soit algébrique, il en sera de même de son équation ponctuelle ; on dit alors que la courbe est algébrique.

Nous allons montrer que l'équation tangentielle a toujours le même degré, quels que soient les axes de coordonnées auxquels on rapporte la courbe.

Nous établirons dans ce but les formules très importantes de transformation de coordonnées qui nous seront très utiles dans la suite.

Soit

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation d'une droite D rapportée à deux axes de coordonnées xOy faisant l'angle θ.

Considérons un deuxième système d'axes, $x'O'y'$, définis par les coordonnées p, q de l'origine O' et par les angles α et β que fait Ox avec les directions $O'x'$ et $O'y'$.

L'équation de la droite D dans ce nouveau système sera de la forme

$$u'x' + v'y' + w' = 0.$$

Nous nous proposons de calculer u, v et w en fonction de u', v' et w'.

Entre les coordonnées x, y, et x', y' d'un même point, on a les formules connues

$$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin \theta} + p,$$

$$y = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \theta} + q,$$

de telle sorte que l'équation de la droite D par rapport au système $x'O'y'$ sera

$$u\left[\frac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}+p\right]+v\left[\frac{x'\sin\alpha+y'\sin\beta}{\sin\theta}+q\right]+w=0$$

ou

$$\frac{u\sin(\theta-\alpha)+v\sin\alpha}{\sin\theta}x'+\frac{u\sin(\theta-\beta)+v\sin\beta}{\sin\theta}y'+up+vq+w=0.$$

Mais comme nous écrivons aussi l'équation de cette droite sous la forme

$$u'x' + v'y' + w' = 0,$$

on aura

$$\frac{u \sin(\theta - \alpha) + v \sin \alpha}{\sin \theta} = \lambda u',$$

$$\frac{u \sin(\theta - \beta) + v \sin \beta}{\sin \theta} = \lambda v',$$

$$up + vq + w = \lambda w',$$

λ étant un nombre arbitraire, différent de zéro.

En résolvant par rapport à u, v, w, on obtient

$$\left.\begin{aligned}
u &= \lambda \cdot \frac{u' \sin\beta - v' \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},\\
v &= \lambda \cdot \frac{-u' \sin(\theta-\beta) + v' \sin(\theta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)},\\
w &= \lambda\left[\frac{-p\sin\beta + q\sin(\theta-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}u' + \frac{p\sin\alpha - q\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}v' + w'\right].
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Telles sont les formules générales de la transformation de coordonnées.

Si

$$f(u, v, w) = 0$$

est l'équation tangentielle d'une courbe C par rapport aux axes xOy, on aura l'équation de cette même courbe par rapport aux axes $x'O'y'$ en remplaçant u, v, w par leurs valeurs (4) en fonction de u', v', w'.

Comme u, v, w sont des fonctions linéaires et homogènes de u', v', w', le premier membre de l'équation de la courbe conservera le même degré.

C'est ce nombre qu'on appelle la *classe* de la courbe.

Le nombre λ disparaît dans la substitution.

Si les nouveaux axes sont parallèles aux premiers et ont le même sens, les formules (4) deviennent

$$\left.\begin{aligned}
u &= \lambda u',\\
v &= \lambda v',\\
w &= \lambda(-pu' - qv' + w').
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Enfin, on peut aussi définir les directions $O'x'$ et $O'y'$ en donnant les coordonnées de leurs points directeurs ; c'est-à-dire les coordonnées des points situés à l'unité de distance de l'origine O sur les parallèles à ces directions menées par ce même point O. Si α, β et α', β' désignent les coordonnées de ces points directeurs, on a les formules de transformation

$$x = \alpha x' + \alpha' y' + p,$$

$$y = \beta x' + \beta' y' + q;$$

on en déduit les formules

$$\left.\begin{aligned} \lambda u' &= u\alpha + v\beta, \\ \lambda v' &= u\alpha' + v\beta', \\ \lambda w' &= up + vq + w, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

d'où l'on peut tirer u, v, w en fonction de u', v', w'.

35. *La classe d'une courbe est égale au nombre de tangentes qu'on peut mener à la courbe par un point quelconque du plan.*

Si x_0, y_0, z_0 désignent les coordonnées du point, les tangentes issues de ce point à la courbe seront déterminées par les équations

$$f(u, v, w) = 0,$$

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0,$$

et le nombre de solutions est égal au degré de la fonction $f(u, v, w)$.

36. On sait qu'en général par un point on peut mener $m(m-1)$ tangentes à une courbe de degré m; il en résulte que la classe de cette courbe est en général $m(m-1)$; mais ce nombre peut se réduire si la courbe présente des points multiples.

Comme les équations tangentielle et ponctuelle d'une courbe se déduisent l'une de l'autre par des calculs entièrement analogues, le degré d'une courbe de classe m est en général $m(m-1)$; mais il peut se réduire, comme nous le verrons plus loin, si la courbe présente des tangentes multiples.

37. Nous allons maintenant appliquer ces considérations générales à quelques cas particuliers.

Nous avons vu au numéro 23 que si l'on suppose

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} = 0,$$

l'équation

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0 \quad (7)$$

représente deux points.

Supposons maintenant $\Delta \neq 0$; l'équation représente alors une courbe de deuxième classe dont nous allons chercher l'équation ponctuelle.

Les relations

$$\frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v} = \frac{z}{f'_w},$$

$$ux + vy + wz = 0,$$

entre lesquelles on doit éliminer u, v, w, peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned} au + b''v + b'w - \lambda x &= 0, \\ b''u + a'v + bw - \lambda y &= 0, \\ b'u + bv + a''w - \lambda z &= 0, \\ ux + vy + wz \qquad &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Le résultat de l'élimination est

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & x \\ b'' & a' & b & y \\ b' & b & a'' & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui est du deuxième degré ; donc les courbes de deuxième classe sont du deuxième degré.

En développant le déterminant qui figure dans le premier membre, on obtient un résultat fort remarquable, qu'on peut d'ailleurs faire apparaître plus simplement en dirigeant l'élimination d'une manière différente.

Résolvons les trois premières équations du système (8) par rapport à u, v, w en appliquant la règle de Cramer, et en désignant comme nous l'avons déjà fait par A, A', A'', B, B', B'' les coefficients des petites lettres correspondantes dans le développement du déterminant Δ.

On obtient

$$\Delta u = \lambda(Ax + B''y + B'z),$$
$$\Delta v = \lambda(B''x + A'y + Bz),$$
$$\Delta w = \lambda(B'x + By + A''z);$$

il ne reste plus alors qu'à transporter ces valeurs de u, v, w dans la dernière équation du système (8), ce qui donne

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0; \quad (9)$$

on a ainsi l'équation ponctuelle de la conique.

On vérifiera aisément que

$$\varphi(x, y, z) \equiv - \begin{vmatrix} a & b'' & b' & x \\ b'' & a' & b & y \\ b' & b & a'' & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix};$$

si l'on désigne par Δ' le discriminant de la fonction $\varphi(x, y, z)$,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

on sait que (1)

$$\Delta' = \Delta^2;$$

on en conclut que $\Delta' \neq 0$, et par suite que l'équation (9) représente une véritable conique.

38. Réciproquement, si l'on donne l'équation ponctuelle d'une conique, l'équation (9), par exemple, on aura l'équation tangentielle par un calcul identique ; on obtiendra l'équation

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

(1) On le démontre en faisant le produit des deux déterminants Δ et Δ' ; on obtient un déterminant de même ordre dont tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux à Δ. On a alors

$$\Delta\Delta' = \Delta^3, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta' = \Delta^2.$$

qui peut s'écrire, développée, en changeant le signe du premier membre,

$$\alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2\beta' wu + 2\beta'' uv = 0,$$

α, α', α'', β, β', β'' désignant les coefficients de A, A', A'', B, B', B'' dans le développement du déterminant Δ'.

Mais cette équation n'est autre que l'équation (7), puisqu'on a vu au numéro 25 que l'on avait

$$\alpha = A'A'' - B^2 = a\Delta, \qquad \beta = B'B'' - AB = b\Delta, \qquad \ldots\ldots$$

En résumé, pour déduire les équations tangentielle et ponctuelle d'une conique l'une de l'autre, il suffit de remplacer dans l'une des équations les coefficients par les mineurs correspondants du discriminant et les coordonnées de droites par des coordonnées de points, ou inversement.

39. Nous avons vu, aux numéros 23 et suivants, que si $\Delta = 0$, l'équation (7) représente deux points, et que la fonction

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

est carré parfait.

On peut donc dire que l'équation ponctuelle représente une droite double, qui est la droite joignant les deux points.

Si, de plus, tous les mineurs de Δ sont nuls, $\varphi(x, y, z)$ est identiquement nul.

On verrait de la même manière qu'étant donnée l'équation ponctuelle de l'ensemble de deux droites, le premier membre de l'équation tangentielle correspondante est carré parfait, de telle sorte que cette équation représente un point double, qui est le point de rencontre des deux droites.

Si les deux droites sont confondues, le premier membre de l'équation tangentielle est identiquement nul.

40. Il est utile de pouvoir écrire immédiatement l'équation tangentielle d'une conique dont l'équation ponctuelle est simple, sans être obligé de recourir aux formules générales.

On établira sans difficulté les résultats contenus dans le tableau suivant :

ÉQUATIONS PONCTUELLES	ÉQUATIONS TANGENTIELLES
$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0$	$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{a'} + \frac{w^2}{a''} = 0$
$ax^2 + 2byz = 0$	$\frac{u^2}{a} + 2\frac{vw}{b} = 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$
$y^2 - 2px = 0$	$pv^2 - 2uw = 0$
$2xy - a^2 = 0$	$2a^2uv - w^2 = 0$

41. Les équations qui figurent dans ce tableau sont des cas particuliers d'équations plus générales dont on trouvera les équations tangentielles en appliquant la méthode indiquée au numéro 32. On pourra ainsi dresser le nouveau tableau qui suit :

ÉQUATIONS PONCTUELLES	ÉQUATIONS TANGENTIELLES
$x^p + ay^q = 0 \quad (p > q)$	$u^p + \frac{(-1)^p p^p}{aq^q(p-q)^{p-q}} v^q w^{p-q} = 0$
$x^p y^q + a = 0$	$u^p v^q + \frac{(-1)^{p+q} p^p q^q}{a(p+q)^{p+q}} w^{p+q} = 0$
$Ax^m + By^m + Cz^m = 0$	$\frac{u^{\frac{m}{m-1}}}{A^{\frac{1}{m-1}}} + \frac{v^{\frac{m}{m-1}}}{B^{\frac{1}{m-1}}} + \frac{w^{\frac{m}{m-1}}}{C^{\frac{1}{m-1}}} = 0$

On peut même supposer dans ces dernières équations que les exposants p, q, m soient fractionnaires et négatifs ; on pourra par exemple déduire la seconde de la première en changeant q en $-q$.

Si dans la dernière équation, on fait $m = \frac{2}{3}$, on a l'équation ponctuelle de la développée d'une conique à centre ; par exemple, dans le cas de l'ellipse, cette équation s'écrit

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}} = 0\,;$$

on en déduit que l'équation tangentielle de cette courbe est

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} - \frac{c^4}{w^2} = 0.$$

Il est à peine utile de faire observer que l'on peut permuter les colonnes des tableaux précédents (sans permuter les titres) en échangeant les variables x, y, z et u, v, w.

C'est ainsi par exemple que si l'équation tangentielle d'une courbe est

$$\mathrm{A}u^m + \mathrm{B}v^m + \mathrm{C}w^m = 0,$$

son équation ponctuelle est

$$\frac{x^{\frac{m}{m-1}}}{\mathrm{A}^{\frac{1}{m-1}}} + \frac{y^{\frac{m}{m-1}}}{\mathrm{B}^{\frac{1}{m-1}}} + \frac{z^{\frac{m}{m-1}}}{\mathrm{C}^{\frac{1}{m-1}}} = 0.$$

42. Enfin, il est bon de remarquer que dans bien des cas, on peut éviter l'application des méthodes générales pour obtenir l'équation tangentielle d'une courbe dont on connait l'équation ponctuelle, ou inversement.

Si l'on veut par exemple l'équation tangentielle de la courbe dont l'équation ponctuelle est

$$f(x, y, z) = 0,$$

on peut écrire que la droite

$$ux + vy + wz = 0$$

est tangente à cette courbe en éliminant l'une des variables x, y ou z entre ces deux équations et en écrivant que l'équation obtenue admet une racine double par rapport à l'une des deux variables qui restent.

Cherchons par exemple l'équation tangentielle de la cis-

soïde de Dioclès, dont l'équation ponctuelle est

$$(x^2+y^2)x-ay^2z=0.$$

Eliminons z entre cette équation et

$$ux+vy+wz=0,$$

ce qui revient à former l'équation de l'ensemble des droites joignant l'origine aux points d'intersection de la courbe et de la droite ; on obtient

$$w(x^2+y^2)x+ay^2(ux+vy)=0,$$

ce qui peut s'écrire, en ordonnant par rapport à x,

$$x^3+xy^2\left(1+\frac{au}{w}\right)+y^3\cdot\frac{av}{w}=0\,;$$

et pour que cette équation admette une racine double, il faut qu'on ait

$$4\left(1+\frac{au}{w}\right)^3+27\frac{a^2v^2}{w^2}=0$$

ou

$$4(au+w)^3+27a^2v^2w=0.$$

On aura de même l'équation ponctuelle d'une courbe, connaissant son équation tangentielle, en éliminant une des variables u, v, w entre les équations

$$f(u,\,v,\,w)=0,$$
$$ux+vy+wz=0,$$

et écrivant que l'équation qui en résulte a une racine double.

43. **Point de contact d'une tangente.** — Considérons maintenant une courbe définie par son équation tangentielle

$$f(\mathrm{U},\,\mathrm{V},\,\mathrm{W})=0,$$

U, V, W désignant les coordonnées courantes; soient u, v, w les coordonnées d'une tangente D à cette courbe, satisfaisant à la relation

$$f(u,\,v,\,w)=0$$

Nous nous proposons de déterminer le point de contact de cette tangente. Pour cela imaginons une tangente voisine D′

qui rencontre D en un point M ; quand D′ se rapproche de D, le point M a une position limite qui est le point de contact de la tangente D.

Les coordonnées de ce point résultent immédiatement de la théorie développée au numéro 31 ; elles sont données par les formules (3),

$$\frac{x}{f'_u} = \frac{y}{f'_v} = \frac{z}{f'_w};$$

on en conclut que l'équation de ce point de contact est

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = 0.$$

Elle a, comme on le voit, la plus grande analogie avec l'équation de la tangente en un point d'une courbe déterminée par son équation ponctuelle.

Nous allons d'ailleurs compléter cette analogie en établissant l'équation du point de contact par un procédé entièrement semblable à celui qu'on emploie pour obtenir l'équation de la tangente.

44. A cet effet, il sera commode de n'avoir que deux coordonnées ; on peut supposer, comme nous l'avons déjà vu, que la tangente D ne passe pas par l'origine, il en sera de même de la tangente voisine D′ ; on pourra alors supposer $w = w' = 1$, et l'équation du point de rencontre M des deux droites D et D′ peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} U & V & 1 \\ u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} U-u & V-v & 0 \\ u & v & 1 \\ u'-u & v'-v & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou encore

$$\frac{V-v}{U-u} = \frac{v'-v}{u'-u}.$$

Quand D′ se rapproche de D, $\dfrac{v'-v}{u'-u}$ a pour limite la

dérivée de v par rapport à u, car on peut considérer v comme une fonction de u définie par l'équation de la courbe. L'équation du point de contact sera donc

$$\frac{V - v}{U - u} = v'_u.$$

Comme l'on a

$$f(u, v, 1) = 0,$$

on en déduit

$$v'_u = -\frac{f'_u}{f'_v},$$

et l'équation devient

$$(U - u)f'_u + (V - v)f'_v = 0,$$

et en introduisant la troisième variable, on obtient

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = 0.$$

45. Dans tout ce qui précède nous avons supposé que les coordonnées de la tangente D n'annulaient pas les trois dérivées partielles f'_u, f'_v, f'_w. Il en est toujours ainsi dans le cas où la courbe est une véritable conique.

Si l'on a

$$f'_u = f'_v = f'_w = 0,$$

la dérivée v'_u a deux valeurs qui sont racines de l'équation

$$v'^2 f''_{v^2} + 2v' f''_{vu} + f''_{u^2} = 0;$$

il en résulte que la droite D touche la courbe en deux points dont on a aisément les équations.

On dit alors que la droite D est une tangente double, et il est facile de généraliser le raisonnement.

Dans le cas où le premier membre de l'équation, $f(u, v, w)$, est algébrique et entier, on peut faire la discussion d'une manière plus simple, et obtenir l'équation de l'ensemble des points de contact d'une tangente multiple.

46. Définitions. — On dit qu'une droite D est tangente simple à une courbe, quand par tout point de cette droite on ne peut mener à la courbe qu'une seule tangente confondue avec la droite D.

Il n'y aura exception que pour le point de contact, par lequel on pourra mener au moins deux tangentes à la courbe confondues avec la droite D.

On dit qu'une droite D est tangente multiple d'ordre p à une courbe, quand par tout point de cette droite on peut mener à la courbe p tangentes confondues avec la droite D.

Il y a, en général, p points situés sur cette droite par chacun desquels on peut mener plus de p tangentes à la courbe confondues avec la droite D : ce sont les p points de contact de la tangente.

Nous allons montrer comment on peut analytiquement reconnaître l'ordre de multiplicité d'une tangente et déterminer ses points de contact.

Soit
$$f(U, V, W) = 0$$
l'équation supposée algébrique, entière et de degré m, d'une courbe.

Désignons par u, v, w les coordonnées d'une tangente D à cette courbe ; on aura la relation

$$f(u, v, w) = 0.$$

Prenons sur cette tangente un point A que nous déterminerons par l'intersection de la droite D et d'une droite quelconque D' ayant pour coordonnées u', v', w' ; nous allons chercher les coordonnées des tangentes issues du point A à la courbe.

Une droite quelconque passant par le point A aura pour coordonnées $\lambda u + \mu u'$, $\lambda v + \mu v'$, $\lambda w + \mu w'$; elle sera tangente à la courbe si l'on a

$$f(\lambda u + \mu u', \quad \lambda v + \mu v', \quad \lambda w + \mu w') = 0,$$

ou, en développant par la formule de Taylor, et en remarquant que le coefficient de λ^m est nul,

$$\lambda^{m-1}\mu(u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w) + \frac{\lambda^{m-2}\mu^2}{2\,!}(u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w)_2 + \cdots = 0, \quad (10)$$

en désignant selon l'usage par $(u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w)_k$ l'expression obtenue en formant la puissance k de $u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w$,

et en y remplaçant le produit de k dérivées partielles du premier ordre par une dérivée partielle du k^e ordre.

Ainsi

$$(f'_u)^\alpha(f'_v)^\beta(f'_w)^\gamma \qquad (\alpha+\beta+\gamma=k)$$

se remplace par

$$f^{(k)}_{u^\alpha v^\beta w^\gamma}.$$

Parmi les tangentes issues du point A, il y en aura autant de confondues avec la droite D que l'équation (10) aura de racines nulles en μ.

Supposons d'abord que f'_u, f'_v et f'_w ne soient pas nulles en même temps ; alors quelles que soient les valeurs de u', v', w', c'est-à-dire quel que soit le point A, l'équation n'admet qu'une seule racine nulle; la tangente est simple.

Le point de contact sera déterminé en écrivant que l'équation (10) a deux racines nulles, c'est-à-dire

$$u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w = 0 : \tag{11}$$

on a ainsi la condition pour que la droite u', v', w' passe par le point de contact; on peut donc dire que l'équation du point de contact est

$$\mathrm{U}f'_u + \mathrm{V}f'_v + \mathrm{W}f'_w = 0.$$

47. Il peut arriver que le coefficient de μ^2 dans l'équation (10) soit nul pour toutes les valeurs de u', v', w' satisfaisant à (11).

Dans ce cas, par le point de contact on pourra mener trois tangentes confondues avec la tangente D; nous démontrerons que la courbe présente en ce point un point de rebroussement.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la forme quadratique en u', v', w'

$$(u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w)_2$$

ou

$$u'^2f''_{u^2} + v'^2f''_{v^2} + w'^2f''_{w^2} + 2v'w'f''_{vw} + 2w'u'f''_{wu} + 2u'v'f''_{uv}$$

soit divisible par $\quad u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w.$

Le discriminant de cette forme est alors nul et l'on a

$$\begin{vmatrix} f''_{u^2} & f''_{uv} & f''_{uw} \\ f''_{vu} & f''_{v^2} & f''_{vw} \\ f''_{wu} & f''_{wv} & f''_{w^2} \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Réciproquement, si cette condition est remplie, je dis que le coefficient de μ^2 est divisible par le coefficient de μ.

Considérons pour cela l'équation

$$\varphi(U, V, W) = U^2 f''_{u^2} + V^2 f''_{v^2} + W^2 f''_{w^2} + 2VW f''_{vw} + 2WU f''_{wu} + 2UV f''_{uv} = 0,$$

qui représente une conique en général.

Cette conique est tangente à la droite D puisque l'on a

$$\varphi(u, v, w) = (uf'_u + vf'_v + wf'_w)_2 = m(m-1)f(u, v, w) = 0;$$

de plus, l'équation du point de contact de cette droite et de la conique s'écrit, comme il est aisé de le voir,

$$U\varphi'_u + V\varphi'_v + W\varphi'_w = 2(m-1)(Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w) = 0.$$

Cette conique est donc tangente à la courbe au point de contact de la droite D.

Supposons maintenant que la relation (12) soit satisfaite, la conique se réduit à deux points et l'un de ces points est le point de contact de la droite D; il en résulte que $\varphi(U, V, W)$ est divisible par $Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w$.

On voit ainsi que les tangentes aux points de rebroussement satisfont à l'équation (12).

Il peut aussi arriver que le coefficient de μ divise les coefficients de μ^3, μ^4, ...; dans ce cas, par le point de contact de la tangente D on pourra mener quatre, cinq, ... tangentes à la courbe confondues avec la droite D.

Mais, il ne faut pas l'oublier, par un point quelconque de la droite D, autre que le point de contact, on ne peut mener qu'*une seule* tangente confondue avec la droite D.

48. Supposons en second lieu que l'on ait

$$f'_u = f'_v = f'_w = 0;$$

l'équation (10) admet alors deux racines nulles en μ, quel que soit le point A choisi sur la droite D; cette droite est tangente double.

Pour déterminer les points de contact, il suffit d'écrire que

l'équation (10) a trois racines nulles, c'est-à-dire que

$$(u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w)_2 = 0.$$

Cette équation exprime que la droite (u', v', w') passe par deux points dont l'équation est

$$(\mathrm{U}f'_u + \mathrm{V}f'_v + \mathrm{W}f'_w)_2 = 0 \quad (1).$$

On peut d'ailleurs remarquer *a priori* que cette équation représente deux points. Car si elle représentait une véritable conique, par tout point de la droite D on pourrait mener deux tangentes à cette conique, les coordonnées u', v', w' de l'une de ces tangentes annuleraient le coefficient de μ^2, et par suite par tout point de la droite on pourrait mener à la courbe trois tangentes confondues avec la droite D, ce qui est impossible si toutes les dérivées partielles du second ordre de la fonction ne sont pas nulles.

On peut donc dire que les points de contact sont déterminés par l'équation

$$(\mathrm{U}f'_u + \mathrm{V}f'_v + \mathrm{W}f'_w)_2 = 0.$$

49. Si, maintenant, les dérivées partielles du second ordre de la fonction $f(u, v, w)$ sont nulles pour les coordonnées de la droite D, cette tangente sera multiple d'ordre *trois*, etc... ; on continuera aisément le raisonnement, et on sera conduit au résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une tangente soit multiple d'ordre p est que les coordonnées de cette tangente

---

(1) Il est aisé de voir que le discriminant du premier membre est nul, car on a

$$(m-1)f'_u = uf''_{u^2} + vf''_{uv} + wf''_{uw} = 0,$$
$$(m-1)f'_v = uf''_{vu} + vf''_{v^2} + wf''_{vw} = 0,$$
$$(m-1)f'_w = uf''_{wu} + vf''_{wv} + wf''_{w^2} = 0;$$

ces trois équations admettant des solutions non toutes nulles en u, v, w, leur déterminant est nul.

annulent toutes les dérivées partielles d'ordre $p-1$ *de la fonction* $f(u, v, w)$. [1]

L'équation de l'ensemble des p points de contact sera

$$(\mathrm{U}f'_u + \mathrm{V}f'_v + \mathrm{W}f'_w)_p = 0\ ;$$

le premier membre est décomposable en un produit de p facteurs linéaires.

50. **Principe de dualité.** — Les considérations qui précèdent vont nous permettre maintenant de bien faire comprendre en quoi consiste le principe de dualité.

Dès le premier chapitre, on reconnaît à chaque instant l'analogie complète qui existe entre l'équation ponctuelle d'une droite et l'équation tangentielle d'un point, entre l'équation générale des droites passant par un point et l'équation générale des points situés sur une droite, ... etc.

Plus loin, nous avons vu qu'une courbe est représentée aussi bien par son équation tangentielle que par son équation ponctuelle, les calculs qui conduisent de l'une de ces équations à l'autre étant semblables dans les deux cas. L'équation du point de contact d'une tangente (u_1, v_1, w_1) à la courbe

$$f(u, v, w) = 0 \qquad \text{(C)}$$

a même forme que l'équation de la tangente au point (x_1, y_1, z_1) à la courbe

$$f(x, y, z) = 0. \qquad (\Gamma)$$

On constate la même analogie en ce qui concerne les conditions pour qu'une droite soit tangente multiple d'ordre déterminé à la courbe (C) et pour qu'un point soit point multiple du même ordre de la courbe Γ.

D'une manière générale, imaginons une propriété quelconque relative à une figure plane composée de points, de droites, de courbes quelconques ; cette propriété s'exprime par une ou

---

(1) Si cette condition est remplie, la fonction $f(u, v, w)$ et toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur à $p-1$ sont également nulles pour les coordonnées de la tangente.

plusieurs relations entre des coordonnées de points (x, y, z) et des coordonnées de droites (u, v, w).

Changeons la signification de ces quantités dans ces mêmes relations, c'est-à-dire supposons que les lettres x, y, z représentent des coordonnées de droites, et que les lettres u, v, w représentent des coordonnées de points ; aux équations ainsi modifiées correspondra une nouvelle propriété qui se rapportera à une nouvelle figure, et l'on dira que cette propriété est corrélative de la première.

A l'aide de cette simple remarque, nous obtenons un moyen de *doubler* en quelque sorte chaque théorème de la géométrie plane, et le principe qui permet ce dédoublement est ce qu'on appelle le *principe de dualité*.

51. Il est à peine utile de faire observer que la première propriété se déduit de la seconde par le même procédé ; c'est pourquoi l'on peut dire que les deux propriétés sont corrélatives l'une de l'autre, ainsi que les deux figures auxquelles se rapportent ces propriétés.

D'après cela, à un point ayant pour coordonnées a, b, c, appartenant à l'une des figures correspond dans l'autre figure une droite qui a pour coordonnées a, b, c, c'est-à-dire pour équation $ax + by + cz = 0$, et réciproquement.

A une courbe (Γ) ayant pour équation ponctuelle

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (\Gamma)$$

et appartenant à la première figure, correspond dans la seconde une courbe (C) ayant pour équation tangentielle

$$f(u, v, w) = 0\,; \qquad (C)$$

aux points de la courbe (Γ) correspondent les tangentes de la courbe (C).

Le degré d'une courbe est égal à la classe de la courbe correspondante.

52. *A des points en ligne droite correspondent des droites passant par un même point.*

Considérons en effet l'équation d'une droite

$$ax + by + cz = 0,$$

x, y, z désignant les coordonnées d'un point variable de cette droite, et a, b, c les coordonnées fixes de la droite. Changeons la signification de ces coordonnées, l'équation précédente exprimera que toutes les droites qui ont pour coordonnées x, y, z passent par le point fixe (a, b, c).

Nous voyons en même temps que la droite sur laquelle sont les points correspond au point par lequel passent les droites correspondantes.

En particulier, au point de rencontre de deux droites correspond la droite qui joint les deux points correspondants.

Observons aussi qu'à la droite de l'infini correspond l'origine des coordonnées, qu'à des points à l'infini correspondent des droites passant par l'origine et qu'à des droites parallèles correspondent des points en ligne droite avec l'origine.

53. Applications. — Soient M et M′ deux points voisins de la courbe (Γ), T et T′ les tangentes correspondantes de la courbe (C) ; ces deux tangentes se coupent en un point H qui correspond à la droite MM′.

Supposons que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, la droite MM′ a pour limite la tangente en M à la courbe (Γ) ; mais alors la droite T′ se rapproche indéfiniment de la droite T, et le point H a pour limite le point de contact de la droite T, et comme le point H correspond toujours à la droite MM′, il en résulte que le point de contact de la tangente T correspond à la tangente au point M.

Dès lors l'équation de la tangente au point $M(x_1, y_1, z_1)$ étant

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0, \tag{1}$$

l'équation du point de contact de la tangente T (qui a pour coordonnées $u_1 = x_1$, $v_1 = y_1$, $w_1 = z_1$) sera

$$uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} = 0. \tag{2}$$

54. Supposons maintenant que la courbe (Γ) soit du deu-

xième degré; il en sera de même de la courbe (C). Si x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées d'un point A quelconque non situé sur la courbe (Γ), l'équation (1) représente la corde des contacts des tangentes menées à la conique par le point A ; il en résulte immédiatement que l'équation (2) est l'équation du point de rencontre des tangentes menées à la courbe (C) aux points d'intersection par la droite (u_1, v_1, w_1).

Par une méthode semblable, on voit que l'équation

$$(uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1})^2 - 4f(u, v, w)f(u_1, v_1, w_1) = 0$$

est l'équation de l'ensemble des points de rencontre de la courbe (C) et de la droite (u_1, v_1, w_1).

Ces exemples montrent suffisamment combien le principe de dualité est utile pour étudier les propriétés des courbes définies par leurs équations tangentielles.

Voici encore une autre remarque fort importante dans la transformation des propriétés métriques des figures.

55. *Le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal au rapport anharmonique des quatre droites concourantes qui leur correspondent.*

Soient x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les coordonnées des quatre points supposés en ligne droite ; leur rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique des droites qui joignent ces points à l'origine, c'est-à-dire à

$$\frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_3}{x_3}}{\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_4}{x_4}} : \frac{\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_3}{x_3}}{\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_4}{x_4}} \quad \text{ou} \quad \frac{y_1x_3 - x_1y_3}{y_1x_4 - x_1y_4} : \frac{y_2x_3 - x_2y_3}{y_2x_4 - x_2y_4}.$$

Les droites correspondant aux quatre points ont pour équations

$$xx_i + yy_i + zz_i = 0,$$

et leur rapport anharmonique ne change pas si on substitue à ces droites des parallèles menées par l'origine ; les coefficients angulaires de ces droites étant $-\frac{x_i}{y_i}$, le rapport an-

harmonique sera

$$\frac{-\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_3}{y_3}}{-\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_4}{y_4}} : \frac{-\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3}}{-\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_4}{y_4}} \quad \text{ou} \quad \frac{y_1x_3-x_1y_3}{y_1x_4-x_1y_4} : \frac{y_2x_3-x_2y_3}{y_2x_4-x_2y_4};$$

il est égal au précédent et le théorème est démontré.

56. En particulier, si quatre points en ligne droite forment une division harmonique, le faisceau des quatre droites correspondantes est harmonique.

57. Supposons, comme application, que l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

représente une conique ; on sait que la relation

$$x_1f'_{x_2} + y_1f'_{y_2} + z_1f'_{z_2} = 0$$

exprime que les deux points A_1 (x_1, y_1, z_1) et A_2 (x_2, y_2, z_2) sont conjugués par rapport à la conique, c'est-à-dire que la droite A_1A_2 rencontre la conique en deux points conjugués harmoniques par rapport à A_1 et A_2.

Considérons la courbe correspondante,

$$f(u, v, w) = 0;$$

la condition

$$u_1f'_{u_2} + v_1f'_{v_2} + w_1f'_{w_2} = 0$$

exprimera que par le point de rencontre des deux droites Δ_1 (u_1, v_1, w_1) et Δ_2 (u_2, v_2, w_2) on peut mener à la courbe deux tangentes conjuguées harmoniques par rapport à ces deux droites ; par analogie on dira que les deux droites Δ_1 et Δ_2 sont conjuguées par rapport à la conique.

58. On peut remarquer que cette transformation est un cas particulier de la transformation par polaires réciproques ; il suffit de prendre comme conique directrice la conique imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

En effet, la polaire d'un point (x, y, z) par rapport à cette conique a pour équation

$$Xx + Yy + Zz = 0,$$

et par conséquent les coordonnées de cette polaire sont égales aux coordonnées de son pôle.

Dans le cas où les axes de coordonnées sont rectangulaires, cette conique directrice est un cercle imaginaire dont le carré du rayon est égal à -1 ; la polaire d'un point A est perpendiculaire à la droite OA, rencontre cette droite en un point B situé par rapport au point O du côté opposé au point A, et le produit des longueurs OA et OB est égal à 1.

Il résulte de là que, si deux droites font un certain angle, les deux points correspondants sont vus de l'origine des coordonnées sous un angle égal ou supplémentaire.

Dans tout ce qui suivra, nous ne ferons pas usage du principe de dualité, nous établirons directement les propriétés des équations tangentielles, laissant au lecteur le soin de les obtenir à l'aide du principe, quand la transformation sera simple.

EXERCICES ET NOTES

1. Pour trouver l'équation tangentielle de l'enveloppe d'une droite, une méthode très simple consiste à se donner l'équation de cette droite, $ux + vy + w = 0$, et à écrire les conditions auxquelles est assujettie cette droite. Dans certains cas, on obtient immédiatement une relation entre u, v, w qui est l'équation cherchée ; dans d'autres cas, on peut avoir à éliminer certains paramètres avant d'obtenir l'équation de l'enveloppe.

2. *On donne un cercle et une corde* AB, *on joint le point* A *à un point* M *quelconque du cercle, on mène ensuite* MC *faisant avec* AB *le même angle que* MA, *mais en sens inverse. Trouver l'enveloppe de* MC.

Prenons pour origine le point A, pour axes AB et une perpendi-

culaire. L'équation du cercle est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

Soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de MC ; je forme l'équation des droites joignant l'origine aux points de rencontre de MC et du cercle,

$$w(x^2 + y^2) + 2(\alpha x + \beta y)(ux + vy) = 0,$$

et j'écris que l'une de ces droites a pour coefficient angulaire celui de MC changé de signe ; on obtient ainsi

$$w(u^2 + v^2) + 4uv(\alpha v + \beta u) = 0,$$

équation tangentielle d'une courbe de troisième classe, ayant trois points de rebroussement.

Dans le cas particulier où AB est un diamètre, l'enveloppe est une hypocycloïde à trois rebroussements.

3. *On donne un triangle* ABC, *on le coupe par une transversale qui détermine sur les côtés ou leurs prolongements six segments tels que le produit de trois d'entre eux non consécutifs soit constant. Enveloppe de la transversale.*

En prenant deux côtés du triangle pour axes, on a pour équation tangentielle de l'enveloppe

$$w(ua + w)(vb + w) = k^3uv(ua + vb),$$

représentant une courbe de troisième classe tangente aux côtés du triangle.

4. *Enveloppe des asymptotes des hyperboles passant par quatre points.*

On forme l'équation générale ponctuelle de ces coniques et on écrit que la droite $ux + vy + w = 0$ rencontre ces coniques en deux points à l'infini.

5. *Par un point fixe* O *pris sur la circonférence d'un cercle, on mène deux cordes* OA, OB *dont le produit est constant; trouver l'enveloppe de la droite* AB.

6. *Un triangle est inscrit dans une circonférence ; on sait que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque* A *de la circonférence sur les trois côtés du triangle sont en ligne droite. Trouver l'enveloppe de cette droite quand le point* A *se déplace sur la circonférence.*

On prend deux côtés du triangle pour axes, on forme les équations des droites perpendiculaires aux axes aux points où ces axes

sont rencontrés par la droite $ux + vy + w = 0$, et on écrit que le point de rencontre de ces perpendiculaires est sur le cercle circonscrit. On trouve que l'enveloppe a pour équation tangentielle

$$w(u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta) - uv[u(a \cos \theta - b) + v(b \cos \theta - a)] = 0.$$

7. *On donne un point* O *sur une circonférence, et l'on demande l'enveloppe des cordes* AB, *telles que le triangle* OAB *ait une surface donnée. Maximum de cette surface; que devient l'enveloppe dans ce cas particulier?*

8. *Équation tangentielle de la courbe* $y = e^x$.

9. Il est en général difficile de construire une courbe représentée par son équation tangentielle.

Dans le cas particulier où l'on peut résoudre l'équation par rapport à l'une des variables u, v, w, les coordonnées du point de contact d'une tangente

$$x = \frac{f'_u}{f'_w}, \qquad y = \frac{f'_v}{f'_w},$$

peuvent s'exprimer alors en fonction de deux variables seulement ou mieux du quotient de ces deux variables; on peut alors aisément construire la courbe. En voici un exemple simple :

On trouve que l'enveloppe d'une droite qui coupe un folium de Descartes $(x^3 + y^3 - 3axy = 0)$ et l'une des tangentes au point double (l'axe Ox) en quatre points conjugués harmoniques est

$$f(u, v, w) = 3a^2uvw - 2a^3u^3 - w^3 = 0\,;$$

on en tire

$$v = \frac{2a^3u^3 + w^3}{3a^2uw},$$

et par suite

$$x = \frac{f'_u}{f'_w} = \frac{w(w^3 - 4a^3u^3)}{2u(a^3u^3 - w^3)}, \qquad y = \frac{f'_v}{f'_w} = \frac{3a^2w^2u}{2(a^3u^3 - w^3)}.$$

Posons $\frac{w}{u} = t$; il vient

$$x = \frac{t(t^3 - 4a^3)}{2(a^3 - t^3)}, \qquad y = \frac{3a^2t^2}{2(a^3 - t^3)}.$$

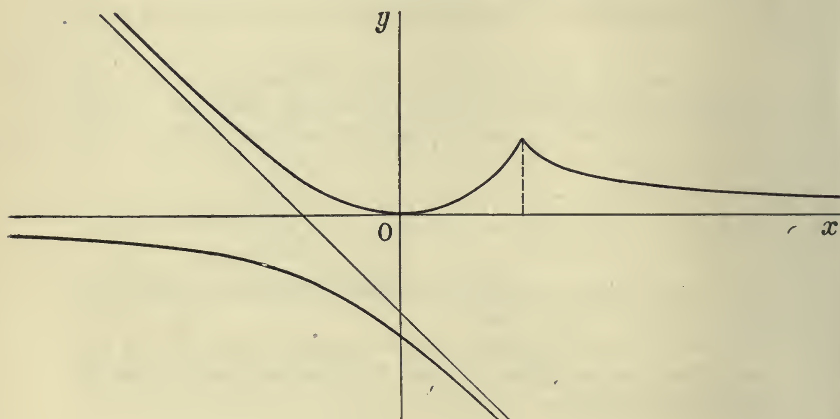
Il suffit alors de faire varier t de $-\infty$ à $+\infty$;

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-(t^3 + 2a^3)^2}{2(a^3 - t^3)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{3a^2t(t^3 + 2a^3)}{2(a^3 - t^3)^2}.$$

On a trois points de rebroussement, correspondant aux racines de l'équation

$$t^3 + 2a^3 = 0\ ;$$

un seul de ces points est réel.



On pouvait d'ailleurs trouver ces points de rebroussement en résolvant les équations

$$f(u,\ v,\ w) = 3a^2uvw - 2a^3u^3 - w^3 = 0$$

et

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} f''_{u^2} & f''_{uv} & f''_{uw} \\ f''_{vu} & f''_{v^2} & f''_{vw} \\ f''_{wu} & f''_{wv} & f''_{u^2} \end{vmatrix} = 54a^4(w^3 + 2a^3u^3 + a^2uvw) = 0.$$

10. Étant donnée une série de courbes variables dont l'équation tangentielle renferme un paramètre λ, $f(u,\ v,\ w,\ \lambda) = 0$, on obtient l'équation tangentielle de l'enveloppe de ces courbes en éliminant λ entre les équations

$$f(u,\ v,\ w,\ \lambda) = 0, \qquad f'_\lambda(u,\ v,\ w,\ \lambda) = 0.$$

11. *On donne un triangle* ABC, *on joint le sommet* A *à un point* N *pris sur le côté opposé. Soit* M *le milieu de* AN, *on mène les droites* BM *et* CM *qui rencontrent respectivement* AC *et* AB *en* P *et* Q. *Enveloppe de la droite* PQ *quand* N *décrit la droite* BC.

12. La condition nécessaire et suffisante pour que la droite de l'infini soit tangente multiple d'ordre p d'une courbe algébrique est qu'en ordonnant l'équation tangentielle par rapport aux puissances de w, le plus haut exposant de cette variable soit égal à $m - p$, m désignant la classe de la courbe.

Par exemple, si la droite de l'infini est tangente multiple d'ordre $m-1$, l'équation s'écrit

$$\varphi_m(u, v) + w\varphi_{m-1}(u, v) = 0,$$

les fonctions φ étant homogènes et de degré indiqué par l'indice.

13. *Étant donnée une courbe du quatrième degré ayant trois points doubles à tangentes inflexionnelles, par un point de cette courbe on peut lui mener quatre tangentes autres que celle dont le point de contact coïncide avec le point considéré. Démontrer que les quatre points de contact sont en ligne droite.*

La courbe donnée a pour équation tangentielle

$$Au^{\frac{2}{3}} + Bv^{\frac{2}{3}} + Cw^{\frac{2}{3}} = 0$$

et pour équation ponctuelle (41)

$$\frac{A^3}{x^2} + \frac{B^3}{y^2} + \frac{C^3}{z^2} = 0.$$

Soit (α, β, γ) un point de cette courbe ; on aura

$$\frac{A^3}{\alpha^2} + \frac{B^3}{\beta^2} + \frac{C^3}{\gamma^2} = 0, \tag{1}$$

et les tangentes issues de ce point vérifient les équations

$$Au^{\frac{2}{3}} + Bv^{\frac{2}{3}} + Cw^{\frac{2}{3}} = 0, \tag{2}$$

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0. \tag{3}$$

Le point de contact d'une de ces tangentes a pour coordonnées $\frac{A}{u^{\frac{1}{3}}}, \frac{B}{v^{\frac{1}{3}}}, \frac{C}{w^{\frac{1}{3}}}$; il s'agit donc de démontrer qu'il existe des nombres fixes m, n, p tels que les solutions des équations (2) et (3) vérifient la relation

$$m\frac{A}{u^{\frac{1}{3}}} + n\frac{B}{v^{\frac{1}{3}}} + p\frac{C}{w^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

Posons

$$Au^{\frac{2}{3}} = a, \qquad Bv^{\frac{2}{3}} = b, \qquad Cw^{\frac{2}{3}} = c,$$
$$u\alpha = a', \qquad v\beta = b', \qquad w\gamma = c'.$$

Les équations (2), (3) et (1) peuvent s'écrire

$$a + b + c = 0,$$
$$a' + b' + c' = 0,$$
$$\frac{a^3}{a'^2} + \frac{b^3}{b'^2} + \frac{c^3}{c'^2} = 0,$$

ou

$$a' + b' + c' = 0,$$

$$a' \cdot \frac{a}{a'} + b' \cdot \frac{b}{b'} + c' \cdot \frac{c}{c'} = 0,$$

$$a' \cdot \left(\frac{a}{a'}\right)^3 + b' \cdot \left(\frac{b}{b'}\right)^3 + c' \cdot \left(\frac{c}{c'}\right)^3 = 0;$$

en éliminant a', b', c' entre ces équations, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{a}{a'} & \frac{b}{b'} & \frac{c}{c'} \\ \left(\frac{a}{a'}\right)^3 & \left(\frac{b}{b'}\right)^3 & \left(\frac{c}{c'}\right)^3 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\left(\frac{b}{b'} - \frac{c}{c'}\right)\left(\frac{c}{c'} - \frac{a}{a'}\right)\left(\frac{a}{a'} - \frac{b}{b'}\right)\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'}\right) = 0.$$

On ne peut avoir $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, car on aurait aussi

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

le point de contact de la tangente coïnciderait avec le point α, β, γ.

On aura donc

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 0$$

ou

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{A}{\frac{1}{u^3}} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{B}{\frac{1}{v^3}} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{C}{\frac{1}{w^3}} = 0,$$

ce qui montre que les points de contact sont sur la droite

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0.$$

14. *Une tangente à la développée d'une ellipse rencontre la courbe en quatre points autres que le point de contact. Démontrer que les tangentes en ces quatre points sont concourantes.*

Ce théorème se déduit du précédent en permutant les variables x, y, z et u, v, w, puisque l'équation ponctuelle de la développée d'une ellipse est de la forme

$$Ax^{\frac{2}{3}} + By^{\frac{2}{3}} + Cz^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Les deux théorèmes sont corrélatifs.

15. *Par un point* P, *situé sur la circonférence inscrite à une*

hypocycloïde à quatre rebroussements, menons quatre tangentes PA, PB, PC, PD *à cette courbe.*

1° *La partie de l'une des tangentes,* PD *par exemple, comprise entre les tangentes à l'hypocycloïde en ses points de rebroussement est divisée en* P *en deux parties égales.*

2° *Les autres tangentes* PA, PB, PC *rencontrent le cercle en trois points* A, B, C *qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.*

3° *Si le cercle rencontre la tangente en l'un des points de rebroussement en* E, *et la parallèle à cette tangente menée par* P *en* F, *l'arc* EF *est triple de l'un des arcs* EA, EB, EC.

On peut envisager l'hypocycloïde à quatre rebroussements comme l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires.

L'équation tangentielle de cette courbe est

$$w^2(u^2+v^2)-a^2u^2v^2=0,$$

et le cercle inscrit a pour équation

$$x^2+y^2-\frac{a^2}{4}=0.$$

16. Rayon de courbure. — Proposons-nous de déterminer le rayon de courbure en un point d'une courbe définie par son équation tangentielle.

Nous supposerons $w=1$, et l'équation de la courbe définira u et v comme fonctions d'un même paramètre.

Considérons une tangente,

$$ux+vy+1=0\ ;$$

le point de contact satisfait à l'équation

$$xdu+ydv=0\ ;$$

on en déduit

$$x=\frac{-dv}{udv-vdu},\qquad y=\frac{du}{udv-vdu},$$

d'où

$$dx=\frac{v(dud^2v-dvd^2u)}{(udv-vdu)^2},\qquad dy=\frac{-u(dud^2v-dvd^2u)}{(udv-vdu)^2}.$$

On en déduit

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{(dud^2v-dvd^2u)\sqrt{u^2+v^2}}{(udv-vdu)^2}.$$

D'autre part l'angle de contingence ε, c'est-à-dire l'angle de deux tangentes infiniment voisines,

$$ux+vy+1=0,$$
$$(u+du)x+(v+dv)y+1=0,$$

est déterminé par la relation

$$\varepsilon = \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2},$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur ; par suite le rayon de courbure est

$$\rho = \frac{ds}{\varepsilon} = \frac{(dud^2v - dvd^2u)(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{(udv - vdu)^3}.$$

17. En écrivant l'équation d'une droite sous la forme

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

on peut prendre pour *coordonnées tangentielles polaires* de la droite les quantités α et p.

L'équation tangentielle d'une courbe sera de la forme

$$p = f(\alpha).$$

Pour obtenir les coordonnées du point de contact d'une tangente, on résout les deux équations

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$
$$- x \sin \alpha + y \cos \alpha - p' = 0,$$

cette dernière étant obtenue en différentiant la première par rapport à α, et p' désignant la dérivée de p.

On en tire

$$x = p \cos \alpha - p' \sin \alpha,$$
$$y = p \sin \alpha + p' \cos \alpha,$$

d'où

$$\frac{dx}{d\alpha} = -(p + p'') \sin \alpha,$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = (p + p'') \cos \alpha,$$

et par suite, en faisant la somme des carrés,

$$\frac{ds}{d\alpha} = \pm (p + p'') = \rho,$$

s désignant l'arc et ρ le rayon de courbure.

L'équation du point peut s'écrire

$$p = \mathrm{A} \cos \alpha + \mathrm{B} \sin \alpha ;$$

celle du cercle,

$$p = \mathrm{A} \cos \alpha + \mathrm{B} \sin \alpha + \mathrm{C} ;$$

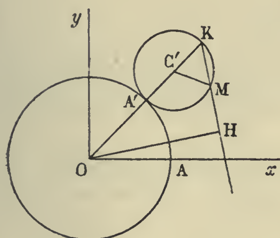
d'une conique en général,

$$p = \mathrm{A} \cos \alpha + \mathrm{B} \sin \alpha \pm \sqrt{\mathrm{C} \cos^2 \alpha + 2\mathrm{D} \sin \alpha \cos \alpha + \mathrm{E} \sin^2 \alpha}.$$

Les épicycloïdes ont une équation tangentielle de forme très simple.

On sait qu'une épicycloïde est la courbe engendrée par un point de la circonférence d'un cercle mobile roulant sur un cercle fixe.

Considérons un cercle de rayon r roulant sur une circonférence fixe de rayon R. Soit A la position initiale de l'un des points de la circonférence mobile ; lorsque cette circonférence sera venue, dans son mouvement, toucher la circonférence fixe en A', le point A sera venu en M, de telle sorte que les deux arcs AA' et A'M soient égaux.



Désignons par φ l'angle AOA' ; l'angle A'C'M est alors égal à $\varphi\frac{R}{r}$, et les coordonnées du point M sont

$$x = (R + r) \cos \varphi - r \cos \left(\varphi + \frac{R\varphi}{r}\right),$$

$$y = (R + r) \sin \varphi - r \sin \left(\varphi + \frac{R\varphi}{r}\right).$$

On en déduit

$$\frac{dx}{d\varphi} = (R + r)\left[- \sin \varphi + \sin \left(\varphi + \frac{R\varphi}{r}\right)\right],$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = (R + r)\left[\cos \varphi - \cos \left(\varphi + \frac{R\varphi}{r}\right)\right],$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\varphi + \frac{R\varphi}{2r}\right);$$

de telle sorte que l'équation de la tangente peut s'écrire

$$X \sin \left(\varphi + \frac{R\varphi}{2r}\right) - Y \cos \left(\varphi + \frac{R\varphi}{2r}\right) - (R + 2r) \sin \frac{R\varphi}{2r} = 0.$$

On voit aisément qu'elle passe par le point K, résultat bien connu.

Posons $$\varphi + \frac{R\varphi}{2r} = \alpha + \frac{\pi}{2};$$

l'équation devient

$$X \cos \alpha + Y \sin \alpha - (R + 2r) \sin \frac{R}{R + 2r} \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (1)$$

Il en résulte que l'équation tangentielle polaire de l'épicycloïde est

$$p = (R + 2r) \sin \frac{R}{R + 2r} \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Si le cercle mobile est tangent intérieurement au cercle fixe, le

lieu du point M est une hypocycloïde dont l'équation tangentielle se déduit de la précédente en changeant r en $-r$, ce qui donne

$$p = (R - 2r) \sin \frac{R}{R - 2r}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ces équations sont de la forme

$$p = A \sin (a\alpha + b),$$

et on voit aisément que quels que soient A, a, b, cette équation représente une hypocycloïde si $a > 1$, une épicycloïde si $a < 1$; seulement, si b est quelconque, l'axe des x ne passe pas par un point de rebroussement de la courbe.

On aurait pu obtenir plus rapidement l'équation tangentielle (1) en abaissant OH perpendiculaire sur la tangente KM, et en calculant cette longueur en fonction de l'angle H0x.

On a

$$OH = OK \sin OKH,$$

$$p = (R + 2r) \sin \frac{R\varphi}{2r},$$

et l'on voit aisément que

$$\varphi + \frac{R\varphi}{2r} = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

18. *Chercher les équations tangentielles polaires de la cardioïde, des hypocycloïdes à trois et quatre rebroussements et de la cycloïde.*

CHAPITRE III

POSITION D'UNE COURBE PAR RAPPORT A SES TANGENTES

59. Pour étudier la position d'une courbe par rapport à l'une de ses tangentes, on peut transporter l'origine des coordonnées en un point de cette droite, ce qui revient à supposer que cette tangente passe par l'origine.

Soit

$$f(u, v, w) = \varphi_m(u, v) + w\varphi_{m-1}(u, v) + w^2\varphi_{m-2}(u, v) + \cdots = 0$$

l'équation de la courbe supposée de classe m, les fonctions φ étant homogènes et de degré indiqué par l'indice.

Les coordonnées des tangentes menées par l'origine vérifient les équations

$$\varphi_m(u, v) = 0,$$
$$w = 0.$$

La fonction $\varphi_m(u, v)$ est décomposable en un produit de m facteurs linéaires de la forme $\alpha u + \beta v$, et à tout facteur de ce genre correspond une tangente à la courbe passant par l'origine ; les paramètres directeurs de cette tangente sont α et β, et ses coordonnées sont $-\beta, \alpha, 0$.

On peut reconnaître très aisément l'ordre de multiplicité de cette tangente.

On a en effet

$$f'_u = \varphi'_{m_u}(u, v) + w\varphi'_{{m-1}_u}(u, v) + \cdots,$$

$$f'_v = \varphi'_{m_v}(u, v) + w\varphi'_{{m-1}_v}(u, v) + \cdots,$$

$$f'_w = \varphi_{m-1}(u, v) + 2w\varphi_{m-2}(u, v) + \cdots$$

Pour que la tangente soit simple, il faut que f'_u, f'_v, f'_w ne soient pas nulles en même temps pour les coordonnées de cette tangente. Comme w est nul, il suffit de considérer les premiers termes $\varphi'_{m_u}(u, v)$, $\varphi'_{m_v}(u, v)$, $\varphi_{m-1}(u, v)$ des trois dérivées.

Si le facteur $u\alpha + v\beta$ est facteur simple de $\varphi_m(u, v)$, les deux dérivées φ'_{m_u} et φ'_{m_v} ne sont pas nulles en même temps, la tangente est simple.

Si le facteur $u\alpha + v\beta$ est facteur multiple de φ_m, la tangente ne sera simple que si $\varphi_{m-1}(u, v)$ n'est pas divisible par ce facteur.

L'équation du point de contact sera

$$U\varphi'_{m_u}(u, v) + V\varphi'_{m_v}(u, v) + W\varphi_{m-1}(u, v) = 0,$$

où l'on remplace u par $-\beta$ et v par α.

60. Supposons d'abord que le point de contact soit à distance finie, c'est-à-dire que le coefficient de W soit différent de zéro. On pourra alors transporter l'origine en ce point (formule [5] du numéro 34) ; nous pouvons supposer que ce calcul a été préalablement fait ; alors, parmi les tangentes issues de l'origine à la courbe, il y en a au moins *deux* qui sont confondues avec la tangente considérée ; par conséquent $\varphi_m(u, v)$ doit admettre au moins deux fois le facteur $u\alpha + v\beta$ (1).

Nous allons étudier la position d'une tangente infiniment voisine de la droite D, et pour cela il sera commode de ne conserver que deux coordonnées.

Supposons que la droite D ne soit pas confondue avec Oy, c'est-à-dire $\alpha \neq 0$. On pourra supposer que v conserve une valeur constante, nous poserons $v = -1$, de telle sorte que u désignera le coefficient angulaire et w l'ordonnée à l'origine.

Posons
$$\frac{\beta}{\alpha} = u_1$$
et
$$\varphi_i(u, -1) = \psi_i(u).$$

---

(1) On peut remarquer aussi que dans l'équation du point de contact les coefficients de U et de V doivent être nuls.

L'équation peut alors s'écrire

$$\psi_m(u) + w\psi_{m-1}(u) + w^2\psi_{m-2}(u) + \cdots\cdots = 0,$$

et, d'après l'hypothèse qui précède, $\psi_m(u)$ est divisible par $(u - u_1)^2$, ce qui donne

$$\psi_m(u) = g(u)(u - u_1)^2 \qquad g(u_1) \neq 0.$$

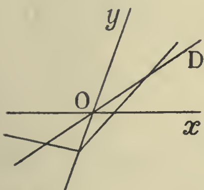
Quand w est infiniment petit, l'équation est vérifiée par deux valeurs infiniment petites de $u - u_1$; on a aisément leurs parties principales en appliquant la méthode de Puiseux :

$$u - u_1 = \pm\sqrt{-\frac{\psi_{m-1}(u_1)}{g(u_1)}w}.$$

On ne peut donner à w que des valeurs du signe de

$$-\frac{\psi_{m-1}(u_1)}{g(u_1)}.$$

Si on suppose $\frac{\psi_{m-1}(u_1)}{g(u_1)} > 0$, nous donnerons à w des valeurs négatives et on aura pour $u - u_1$ des valeurs positives et négatives, ce qui revient à dire que les tangentes voisines auront des ordonnées à l'origine négatives et leurs coefficients angulaires, l'un supérieur, l'autre inférieur à u_1.



61. Déterminons maintenant les points de contact de ces tangentes. Nous allons établir que tout point de contact d'une tangente infiniment voisine est toujours au-dessus de la droite D si w est négatif, et au-dessous si w est positif.

Remarquons d'abord que $u - u_1$ est toujours, par rapport à w, d'ordre infinitésimal inférieur à l'unité.

Car si on cherche les coordonnées du point de rencontre de la droite D et de la tangente voisine, c'est-à-dire si on résout les deux équations

$$y - u_1x = 0,$$
$$y - ux - w = 0,$$

on trouve

$$x = \frac{-w}{u - u_1}, \qquad y = \frac{-wu_1}{u - u_1},$$

et comme x et y ont pour limite zéro, il faut que w soit d'ordre infinitésimal supérieur à $u - u_1$.

On aura donc pour une tangente voisine

$$u - u_1 = Aw^p(1 + \varepsilon),$$

ε étant un infiniment petit et $p < 1$.

Or l'équation du point de contact de cette tangente voisine peut s'écrire

$$U - u = (W - w)u'_w;$$

les coordonnées de ce point sont donc

$$x_0 = -\frac{1}{u'_w}, \qquad y_0 = w - \frac{u}{u'_w};$$

on en déduit

$$y_0 - u_1 x_0 = w - \frac{u - u_1}{u'_w}.$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, on a

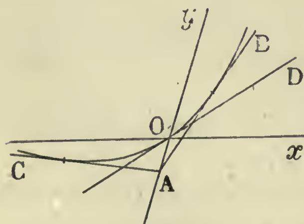
$$u - u_1 = Aw^p,$$

$$u'_w = pAw^{p-1};$$

par suite

$$y_0 - u_1 x_0 = w\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Cette expression est de signe contraire à w, puisque p est plus petit que 1 ; c'est le résultat que nous avions annoncé et qui nous servira dans toute la discussion.



Alors dans le cas particulier qui nous occupe, où l'on a

$$u - u_1 = \pm\sqrt{-\frac{\psi_{m-1}(u_1)}{g(u_1)} \cdot w},$$

et en supposant

$$\frac{\psi_{m-1}(u_1)}{g(u_1)} > 0,$$

on aura les deux tangentes infiniment voisines de la droite D, AB et AC, et les points de contact seront situés au-dessus de la droite D.

On obtient ainsi la position de la courbe par rapport à la tangente.

62. Il peut arriver maintenant que $\psi_m(u)$ contienne plus de deux fois le facteur $(u-u_1)$. Supposons par exemple que

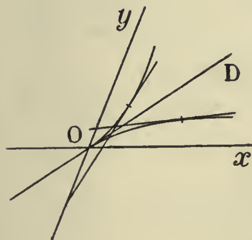
$$\psi_m(u) = (u-u_1)^3 g(u).$$

On trouvera aisément pour les tangentes infiniment voisines

$$u - u_1 = \sqrt[3]{-\frac{\psi_{m-1}(u_1)}{g(u_1)}w},$$

et si

$$\frac{\psi_{m-1}(u_1)}{g(u_1)} > 0,$$



$u - u_1$ sera de signe contraire à w, et on aura la forme de courbe ci-contre ; l'origine est un point de rebroussement, et parmi les tangentes issues de ce point à la courbe, il y en a trois confondues avec la droite D.

Plus généralement, si

$$\psi_m(u) = (u-u_1)^p g(u), \qquad g(u_1) \neq 0,$$

on peut mener de l'origine p tangentes confondues avec la droite D ; on aura pour les tangentes voisines

$$u - u_1 = \sqrt[p]{-\frac{\psi_{m-1}(u_1)}{g(u_1)}w}.$$

Si p est pair, la courbe présentera la même forme que dans la figure du numéro 61 ; si p est impair, on aura un point de rebroussement comme dans la figure précédente.

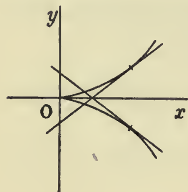
Nous avons ainsi la position de la courbe par rapport à une tangente simple dans tous les cas possibles, quand le point de contact est à distance finie.

63. Considérons, comme exercice, la cissoïde qui a pour équation tangentielle (42)

$$4(au+w)^3+27a^2v^2w=0.$$

En ordonnant par rapport aux puissances croissantes de w, l'équation peut s'écrire

$$a^3u^3+a^2w\left[\frac{27}{4}v^2+3u^2\right]+3aw^2u+w^3=0.$$



Quand w tend vers zéro, trois valeurs de u tendent vers zéro, l'axe Ox est une tangente simple et compte pour trois parmi les tangentes issues de l'origine ; on aura pour les tangentes infiniment voisines, en faisant $v=-1$,

$$u=\sqrt[3]{-\frac{27}{4a}w};$$

u est de signe contraire à w.

64. Supposons maintenant que le point de contact soit à l'infini ; il faut pour cela que $\varphi'_{m_u}(u, v)$ et $\varphi'_{m_v}(u, v)$ ne soient pas nuls en même temps et que $\varphi_{m-1}(u, v)$ soit nul.

Ceci revient à dire que $u-u_1$ est facteur simple de $\psi_m(u)$ et divise $\psi_{m-1}(u)$.

Posons

$$\psi_m(u)=(u-u_1)g(u), \qquad g(u_1)\neq 0.$$

On aura l'équation

$$(u-u_1)g(u)+w\psi_{m-1}(u)+w^2\psi_{m-2}(u)+\cdots=0,$$

avec la condition $\qquad \psi_{m-1}(u_1)=0.$

Supposons d'abord $\qquad \psi_{m-2}(u_1)\neq 0;$

dans ce cas $u-u_1$ est infiniment petit du deuxième ordre, et sa partie principale est donnée par la règle de Puiseux,

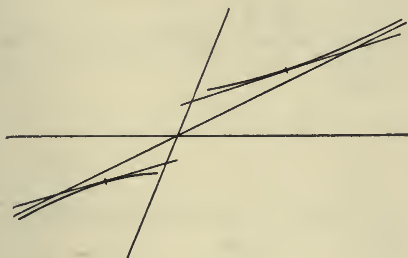
$$u-u_1=-\frac{\psi_{m-2}(u_1)}{g(u_1)}w^2,$$

ce qui montre que $u-u_1$ a un signe constant. Pour la détermination du point de contact, on se reportera au numéro 61.

Quand le point de contact de la tangente D est à l'infini,

$u - u_1$ est d'ordre infinitésimal supérieur à w, alors p est plus grand que 1 et l'on voit que $y_0 - u_1 x_0$ a le signe de w. On aura alors sans peine la forme de la courbe.

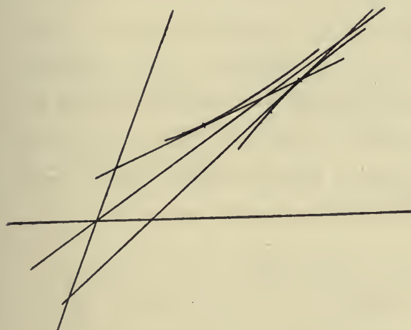
Supposons par exemple $\frac{\psi_{m-2}(u_1)}{g(u_1)} > 0$; $u - u_1$ sera négatif quel que soit w, et on aura la forme de courbe représentée par la figure ci-contre.



65. Il peut arriver que le coefficient de w^2 soit nul pour $u = u_1$. Si le coefficient de w^3 est différent de zéro, $u - u_1$ sera infiniment petit du troisième ordre, et on aura

$$u - u_1 = -\frac{\psi_{m-3}(u_1)}{g(u_1)} w^3,$$

et en supposant $\frac{\psi_{m-3}(u_1)}{g(u_1)} > 0$, on obtiendra la disposition ci-contre.



C'est le point de rebroussement à l'infini.

D'une manière générale, si on suppose

$$\psi_{m-1}(u_1) = \psi_{m-2}(u_1) = \cdots = \psi_{m-p+1}(u_1) = 0$$

et

$$\psi_{m-p}(u_1) \neq 0,$$

$u - u_1$ sera infiniment petit d'ordre p; on aura

$$u - u_1 = -\frac{\psi_{m-p}(u_1)}{g(u_1)} w^p.$$

Si p est pair, on aura la forme indiquée sur l'avant-dernière figure. Si p est impair, on se reportera à la dernière figure.

66. Considérons, comme exemple, l'équation tangentielle de l'hyperbole rapportée à ses axes,

$$a^2u^2 - b^2v^2 - w^2 = 0\,;$$

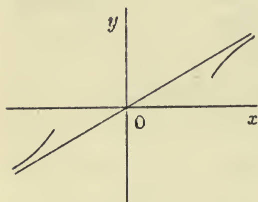
en y faisant $v = -1$, on a

$$a^2u^2 - b^2 - w^2 = 0,$$

ce qui donne les deux asymptotes passant par l'origine qui ont pour coefficients angulaires $\pm \frac{b}{a}$.

De l'équation on tire

$$u - \frac{b}{a} = \frac{w^2}{\left(u + \frac{b}{a}\right)a^2},$$



et, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$u - \frac{b}{a} = + \frac{w^2}{2ab};$$

donc $u - \frac{b}{a}$ sera positif pour les tangentes voisines, ce qui donne la position de la courbe représentée par la figure ci-contre.

67. Supposons maintenant que la tangente D soit une tangente double; f'_u, f'_v et f'_w doivent être nulles pour les coordonnées de cette droite. En se reportant aux expressions de ces dérivées données au numéro 59, on voit que $\varphi'_{m\,u}(u, v)$, $\varphi'_{m\,v}(u, v)$ et $\varphi_{m-1}(u, v)$ doivent être nuls, ce qui exige que $\varphi_m(u, v)$ soit divisible par $(u\alpha + v\beta)^2$ et $\varphi_{m-1}(u, v)$ par $u\alpha + v\beta$.

On a aussi

$$f''_{u^2} = \varphi''_{m\,u^2}(u, v) + w\varphi''_{m-1\,u^2}(u, v) + \cdots,$$

$$f''_{uv} = \varphi''_{m\,uv}(u, v) + w\varphi''_{m-1\,uv}(u, v) + \cdots,$$

$$f''_{v^2} = \varphi''_{m\,v^2}(u, v) + w\varphi''_{m-1\,v^2}(u, v) + \cdots,$$

$$f''_{uw} = \varphi'_{m-1\,u}(u, v) + 2w\varphi'_{m-2\,u}(u, v) + \cdots,$$

$$f''_{vw} = \varphi'_{m-1\,v}(u, v) + 2w\varphi'_{m-2\,v}(u, v) + \cdots,$$

$$f''_{w^2} = 2\varphi_{m-2}(u, v) + 6w\varphi_{m-3}(u, v) + \cdots,$$

et ces six dérivées ne doivent pas être nulles en même temps.

L'équation de l'ensemble des points de contact est

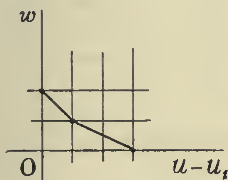
$$U^2\varphi''_{m\,u^2}(u,\ v)+2UV\varphi''_{m\,uv}(u,\ v)+V^2\varphi''_{m\,v^2}(u,\ v)+2UW\varphi'_{m-1\,u}(u,\ v)$$
$$+2VW\varphi'_{m-1\,v}(u,v)+2W^2\varphi_{m-2}(u,v)=0.$$

Supposons que l'un des points de contact soit à distance finie ; on pourra alors y transporter l'origine, et les coefficients de U^2, UV, V^2 dans cette dernière équation seront nuls ; par conséquent $\varphi_m(u,\ v)$ admettra trois fois le facteur $u\alpha+v\beta$.

En reprenant les notations du numéro 60, l'équation pourra s'écrire

$$(u-u_1)^3g(u)+w(u-u_1)g_1(u)+w^2\psi_{m-2}(u)+\ldots=0;$$

pour séparer les trois valeurs infiniment petites de $u-u_1$, nous construirons le polygone de Newton en supposant d'abord



$$g(u_1)\neq 0,\quad g_1(u_1)\neq 0,\quad \psi_{m-2}(u_1)\neq 0.$$

Deux côtés sont à considérer.

Nous poserons d'abord

$$u-u_1=zw^{\frac{1}{2}},$$

et, en remplaçant dans l'équation, on aura pour déterminer z,

$$g(u_1)z^2+g_1(u_1)=0;$$

on obtient ainsi

$$u-u_1=\pm\sqrt{-\frac{g_1(u_1)}{g(u_1)}w};$$

w ne peut avoir qu'un signe déterminé, on retrouve alors la forme représentée par la figure du numéro 61.

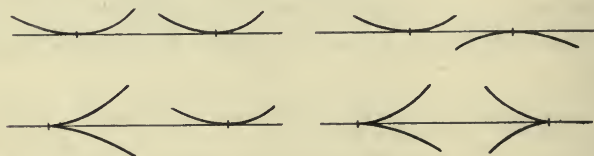
Pour l'autre côté du polygone on posera

$$u-u_1=zw;$$

mais alors, $u-u_1$ et w étant infiniment petits de même ordre, le point limite d'intersection de cette droite et de la tangente D a une position différente de l'origine ; nous obtenons le deuxième point de contact, qu'on peut étudier directement en transportant l'origine en ce point.

Il peut arriver que $\varphi_m(u, v)$ admette plus de trois fois le facteur $u\alpha + v\beta$; nous aurons à l'origine un point de rebroussement si l'exposant du facteur est pair, et un point sans particularité géométrique si l'exposant est impair, comme on l'a vu aux numéros 61 et 62.

En résumé, dans le cas où les deux points de contact sont réels, distincts et à distance finie, on peut obtenir les figures suivantes :



68. Considérons comme exemple la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires. L'équation tangentielle de cette courbe est

$$a^2u^2v^2 - w^2(u^2 + v^2) = 0.$$

On voit que l'axe des x est tangente double, et que les deux points de contact ont pour abscisses $\pm a$.

Transportons l'origine en l'un de ces points, celui qui a pour abscisse a par exemple ; l'équation devient

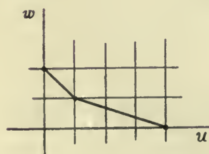
$$a^2u^2v^2 - (w - au)^2(u^2 + v^2) = 0$$

ou

$$-a^2u^4 + 2auw(u^2 + v^2) - w^2(u^2 + v^2) = 0,$$

ou en faisant $v = -1$ et changeant les signes,

$$a^2u^4 - 2auw(u^2 + 1) + w^2(u^2 + 1) = 0.$$



Quand w tend vers zéro, quatre valeurs de u sont infiniment petites ; donc par l'origine on peut mener quatre tangentes confondues avec l'axe Ox.

Pour séparer les valeurs infiniment petites de w, je construis le polygone de Newton, dont le premier côté me donne trois valeurs de u d'ordre $\frac{1}{3}$; en posant

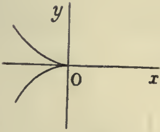
$$u = zw^{\frac{1}{3}},$$

on a

$$z^3 = \frac{2}{a},$$

d'où

$$u = \sqrt[3]{\frac{2w}{a}}.$$



On voit que u a sans cesse le signe de w, ce qui donne la forme ci-contre.

69. Si $\psi_{m-2}(u_1)$ était nul, le deuxième point de contact serait à l'infini ; on l'étudierait comme plus haut (numéros 64 et 65).

Si $g_1(u_1)$ est nul, $\psi_{m-2}(u_1)$ étant différent de zéro, $\varphi_{m-1}(u, v)$ contient deux fois le facteur $u\alpha + v\beta$, l'équation de l'ensemble des points de contact se réduit à

$$W^2 = 0,$$

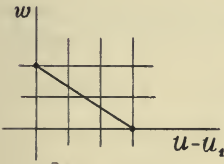
ces points sont confondus à l'origine. Nous allons étudier la position de la courbe.

L'équation pourra s'écrire

$$(u - u_1)^3 g(u) + w(u - u_1)^2 g_1(u) + w^2 \psi_{m-2}(u) + \cdots = 0,$$

$g_1(u)$ n'ayant plus la même signification que plus haut.

En supposant d'abord $g(u_1)$ différent de zéro, on a un seul côté dans le polygone de Newton, $u - u_1$ est infiniment petit d'ordre $\frac{2}{3}$, et en posant



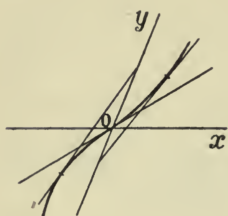
$$u - u_1 = zw^{\frac{2}{3}},$$

z est déterminé par l'équation

$$z^3 g(u_1) + \psi_{m-2}(u_1) = 0,$$

d'où

$$u - u_1 = \sqrt[3]{-\frac{\psi_{m-2}(u_1)}{g(u_1)} w^2}.$$



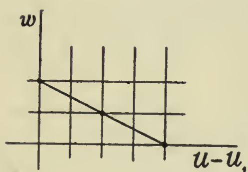
On voit ainsi que $u - u_1$ a un signe constant quel que soit w.

Si on suppose

$$-\frac{\psi_{m-2}(u_1)}{g(u_1)} > 0,$$

$u - u_1$ sera positif, et on aura la forme indiquée par la figure; l'origine est un point d'inflexion.

70. Supposons maintenant $g(u_1) = 0$ et $g_1(u_1) \neq 0$; l'équation s'écrit



$$(u - u_1)^4\varphi(u) + w(u - u_1)^2 g_1(u) + w^2\psi_{m-2}(u) + \cdots = 0.$$

Nous poserons alors

$$u - u_1 = zw^{\frac{1}{2}},$$

et z sera déterminé par l'équation

$$z^4\varphi(u_1) + z^2 g_1(u_1) + \psi_{m-2}(u_1) = 0.$$

Posons $z^2 = t$; l'équation devient

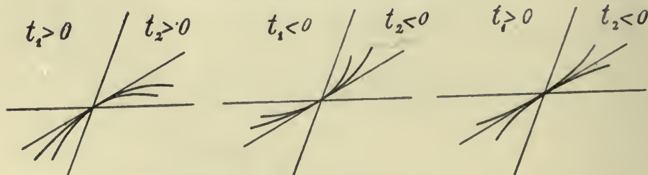
$$t^2\varphi(u_1) + tg_1(u_1) + \psi_{m-2}(u_1) = 0.$$

Si cette équation a ses racines imaginaires, les tangentes voisines de la droite D sont imaginaires, il en est de même des points de contact.

Si cette équation a ses racines réelles et distinctes, soient t_1 et t_2, les valeurs infiniment petites de $u - u_1$ seront données par

$$u - u_1 = \pm\sqrt{t_1 w}$$

$$u - u_1 = \pm\sqrt{t_2 w}$$



et l'on a les figures ci-dessus selon les signes de t_1 et de t_2.

71. S'il arrive que l'équation du second degré en t ait ses racines égales, il faut pousser plus loin la séparation des valeurs infiniment petites de $u - u_1$.

Posons $u = u_1 + \theta$; l'équation prend alors la forme

$$\theta^4\varphi(u_1 + \theta) + w\theta^2 g_1(u_1 + \theta) + w^2\psi_{m-2}(u_1 + \theta) + \cdots = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\theta^4 \left| \begin{array}{l} \varphi(u_1) \\ + \theta\varphi'(u_1) \\ + \dfrac{\theta^2}{2}\varphi''(u_1) \\ + \cdots \end{array} \right. + w\theta^2 \left| \begin{array}{l} g_1(u_1) \\ + \theta g_1'(u_1) \\ + \cdots \end{array} \right. + w^2 \left| \begin{array}{l} \psi_{m-2}(u_1) \\ + \theta\psi_{m-2}'(u_1) \\ + \cdots \end{array} \right. + \cdots = 0$$

ou encore

$$\varphi(u_1)(\theta^2 - \alpha w)^2 + \theta^5 f(\theta) + w\theta^3 f_1(\theta) + w^2\theta f_2(\theta) + w^3 f_3(\theta) + \cdots = 0,$$

$f(\theta)$, $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\theta)$ représentant des polynomes entiers en θ ayant un terme indépendant, et α désignant la racine double de l'équation en t.

Supposons $\alpha > 0$; on ne pourra donner à w que des valeurs positives, et pour éviter les exposants fractionnaires nous poserons

$$w = w'^2, \qquad \alpha = \alpha'^2.$$

θ sera alors du premier ordre par rapport à w' ; en désignant par zw' sa partie principale, on aura, après avoir divisé par w'^4,

$$\varphi(u_1)(z^2 - \alpha'^2)^2 + z^5 w' f(zw') + z^3 w' f_1(zw') + zw' f_2(zw') + w'^2 f_3(zw') + \cdots = 0,$$

équation de la forme

$$(z^2 - \alpha'^2)^2 + zw'[Az^4 + Bz^2 + C] + w'^2 g(z) + \cdots = 0.$$

Si l'on suppose

$$M = A\alpha'^4 + B\alpha'^2 + C \neq 0,$$

les valeurs de z se séparent immédiatement :

$$(z - \alpha')^2 = -\frac{M}{4\alpha'} w',$$

$$(z + \alpha')^2 = +\frac{M}{4\alpha'} w',$$

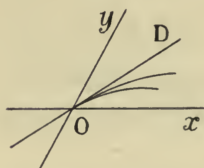
ou, en remplaçant z par sa valeur $\frac{\theta}{w'}$,

$$\theta = u - u_1 = w'\left[\alpha' \pm \sqrt{-\frac{M}{4\alpha'}w'}\right],$$

$$\theta = u - u_1 = w'\left[-\alpha' \pm \sqrt{+\frac{M}{4\alpha'}w'}\right].$$

Si $\frac{M}{4\alpha'} > 0$, on ne pourra donner à w' que des valeurs négatives dans la première expression, et des valeurs positives dans la deuxième, de sorte que α' étant positif, les deux valeurs réelles de θ seront négatives, et w est toujours positif.

On aura donc la forme de courbe représentée par la figure ci-contre ; on dit que l'origine est un point de rebroussement de seconde espèce.



Pour continuer la discussion, il faudrait examiner le cas où $M = 0$, puis ensuite supposer que le premier terme de l'équation écrite au début du numéro 70,

$$(u - u_1)^4\varphi(u) + w(u - u_1)^2 g_1(u) + w^2\psi_{m-2}(u) + \cdots = 0,$$

contient plus de quatre fois le facteur $u - u_1$, et ainsi de suite.

On étudiera de la même manière le cas de la tangente triple, quadruple, etc. ; la méthode est toujours la même ; elle consiste à développer $u - u_1$ en série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de w.

72. Dans tout ce qui précède nous avons supposé que la tangente n'était pas parallèle à Oy ; dans le cas contraire, en transportant l'origine en un point de cette tangente, elle se confond avec Oy ; pour étudier la position des tangentes voisines, on supposera $u = 1$ et on développera v en série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de w.

73. A titre d'exemple, supposons que l'axe des y soit tan-

gente double, c'est-à-dire que $\varphi_m(u, v)$ soit divisible par v^2 et $\varphi_{m-1}(u, v)$ par v.

Cherchons la condition pour que les deux points de contact soient à l'infini ; il faut pour cela que l'équation de l'ensemble de ces points (67) se réduise à

$$V^2 = 0.$$

Il en résulte que $\varphi_m(u, v)$ et $\varphi_{m-1}(u, v)$ seront divisibles par v^2, $\varphi_{m-2}(u, v)$ par v.

En faisant alors $u = 1$ dans l'équation de la courbe, elle s'écrit

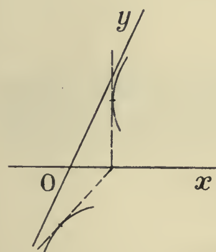
$$v^2 g(v) + wv^2 g_1(v) + w^2 v g_2(v) + w^3 \psi(v) + \cdots = 0,$$

$g(v)$, $g_1(v)$, $g_2(v)$, $\psi(v)$ désignant des polynomes entiers en v ayant un terme indépendant.

Quand w tend vers zéro, deux valeurs de v sont infiniment petites, et leurs valeurs principales sont données par

$$v = \pm\sqrt{-\frac{\psi(0)}{g(0)} w^3}.$$

On ne peut donner à w que des valeurs de signe contraire à $\frac{\psi(0)}{g(0)}$.



Supposons $\frac{\psi(0)}{g(0)} > 0$, w reçoit des valeurs négatives, et en remarquant que w est l'abscisse changée de signe du point de rencontre de la tangente avec Ox, et que v est l'inverse changé de signe du coefficient angulaire, on a aisément la position des tangentes infiniment voisines, et celle de leurs points de contact.

La figure obtenue représente le point d'inflexion à l'infini.

CHAPITRE IV

TANGENTES ET NORMALES

---

74. Tangentes par un point extérieur. — Soient

$$f(u, v, w) = 0$$

l'équation tangentielle d'une courbe C, et α, β les coordonnées d'un point A.

Les coordonnées des tangentes menées à la courbe par le point satisfont, comme nous l'avons déjà vu, aux deux équations

$$f(u, v, w) = 0,$$

$$u\alpha + v\beta + w = 0.$$

Le nombre de ces tangentes est égal à la classe de la courbe.

En éliminant w entre ces deux équations, on a une équation homogène en u et v,

$$f[u, v, -(u\alpha + v\beta)] = 0,$$

qui détermine les directions de ces tangentes.

En y faisant $u = m$, $v = -1$, on aura l'équation aux coefficients angulaires de ces tangentes,

$$f(m, \ -1, \ \beta - m\alpha) = 0.$$

On peut d'ailleurs obtenir cette équation plus rapidement en écrivant qu'une droite quelconque passant par le point A,

$$y - \beta = m(x - \alpha),$$

est tangente.

75. Appliquons ce résultat au cas où la courbe est de deuxième classe,

$$f(u,\ v,\ w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0;$$

on aura pour l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du point $(\alpha,\ \beta)$

$$am^2 + a' + a''(\beta - m\alpha)^2 - 2b(\beta - m\alpha) + 2b'm(\beta - m\alpha) - 2b''m = 0$$

ou

$$m^2(a''\alpha^2 - 2b'\alpha + a) - 2m(a''\alpha\beta - 2b\alpha - 2b'\beta + b'') + a''\beta^2 - 2b\beta + a' = 0.$$

Si l'équation représente une ellipse rapportée à ses axes,

$$f(u,\ v,\ w) = a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0,$$

ou une parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet,

$$f(u,\ v,\ w) = pv^2 - 2uw = 0,$$

les coefficients angulaires des tangentes menées par le point A seront donnés respectivement par les équations

$$a^2m^2 + b^2 - (\beta - m\alpha)^2 = 0,$$

et

$$p - 2m(\beta - m\alpha) = 0.$$

76. On peut par le même procédé obtenir l'équation de l'ensemble de ces tangentes. Soit $(x,\ y)$ un point d'une de ces tangentes ; comme elle passe par le point $(\alpha,\ \beta)$, son équation sera

$$\frac{Y - \beta}{X - \alpha} = \frac{y - \beta}{x - \alpha},$$

et tout revient à écrire que cette droite est tangente, c'est-à-dire que ses coordonnées satisfont à l'équation tangentielle de la courbe.

Il suffit de remplacer dans l'équation aux coefficients angulaires m par $\dfrac{y - \beta}{x - \alpha}$, ce qui donne

$$f\left(\frac{y - \beta}{x - \alpha}\quad -1,\quad \beta - \alpha \cdot \frac{y - \beta}{x - \alpha}\right) = 0$$

ou, en chassant le dénominateur $x - \alpha$,

$$f[y - \beta, \quad -(x - \alpha), \quad \beta x - \alpha y] = 0.$$

77. Proposons-nous maintenant de déterminer l'équation tangentielle de l'ensemble des points de contact des tangentes issues du point A à la courbe C.

Soient u', v', w' les coordonnées d'une de ces tangentes; on a

$$f(u', v', w') = 0,$$

$$u'\alpha + v'\beta + w' = 0.$$

Écrivons qu'une droite (u, v, w) passe par le point de contact de cette tangente; on aura

$$uf'_{u'} + vf'_{v'} + wf'_{w'} = 0.$$

En éliminant u', v', w' entre ces trois équations, on aura l'équation cherchée.

L'élimination se fait aisément dans le cas où la courbe est de deuxième classe; car la dernière équation peut s'écrire

$$u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w = 0.$$

On a alors deux équations du premier degré en u', v', w' dont les solutions sont données par

$$\frac{u'}{\beta f'_w - f'_v} = \frac{v'}{f'_u - \alpha f'_w} = \frac{w'}{\alpha f'_v - \beta f'_u};$$

en substituant dans la première, on obtient

$$f(\beta f'_w - f'_v, \quad f'_u - \alpha f'_w, \quad \alpha f'_v - \beta f'_u) = 0.$$

On a ainsi une équation du deuxième degré en u, v, w qui représente les deux points de contact.

78. Remarque. — En écrivant que dans cette équation le coefficient de w^2 est nul, on a une relation entre α et β exprimant que, parmi les tangentes issues du point A, l'une a son point de contact à l'infini; on peut donc dire que cette relation est l'équation de l'ensemble des asymptotes de la courbe considérée.

On a de même l'équation de l'ensemble des asymptotes d'une courbe quelconque de classe n, en formant l'équation des points de contact des tangentes issues d'un point, et annulant le coefficient de w^n dans cette équation.

79. Tangentes parallèles à une direction donnée.— Soit m le coefficient angulaire de la direction donnée. Les coordonnées des tangentes parallèles à cette direction seront données par les équations

$$f(u, v, w) = 0,$$

$$u + vm = 0.$$

Si l'on veut les ordonnées à l'origine de ces tangentes, on écrira que la droite

$$y = mx + \lambda$$

est tangente, ce qui donne

$$f(m, \quad -1, \quad \lambda) = 0,$$

équation en λ qui détermine les ordonnées à l'origine.

En y remplaçant λ par $y - mx$, on aura l'équation de l'ensemble de ces tangentes.

Les équations bien connues

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

$$y = mx + \frac{p}{2m},$$

relatives à l'ellipse et à la parabole, sont des cas particuliers de cette équation.

80. On obtiendra de la même manière que plus haut (77) l'équation de l'ensemble des points de contact ; il suffira d'éliminer u', v', w' entre les équations

$$f(u', v', w') = 0,$$

$$u' + v'm = 0,$$

$$uf'_{u'} + vf'_{v'} + wf'_{w'} = 0.$$

Dans le cas où la courbe est de deuxième classe, la dernière s'écrit

$$u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w = 0.$$

et le résultat de l'élimination peut s'écrire

$$f(mf'_w, \quad -f'_w, \quad f'_v - mf'_u) = 0.$$

81. Remarque. — En annulant le coefficient de w^2, on aura l'équation aux coefficients angulaires des directions asymptotiques.

82. La recherche des tangentes parallèles à une direction donnée se déduit sans difficulté de la recherche des tangentes menées par un point (α, β). Il suffit de supposer que le point s'éloigne à l'infini dans la direction donnée ; à cet effet on remplace α et β par $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, on chasse le dénominateur γ et on fait ensuite $\gamma = 0$. Dans l'équation qui en résulte α, β désignent les paramètres directeurs de la direction. Si m est son coefficient angulaire, il suffit de remplacer α par 1 et β par m.

83. Intersection d'une courbe et d'une droite. — Considérons une courbe C ayant pour équation tangentielle

$$f(u, v, w) = 0$$

et une droite D ayant pour coordonnées u_0, v_0, w_0.

Nous nous proposons de déterminer l'équation tangentielle des points de rencontre de la courbe et de la droite.

Il nous faut pour cela chercher la condition pour qu'une droite $\Delta(u, v, w)$ passe par l'un de ces points ; ce qui revient à écrire que le point de rencontre M des deux droites D et Δ est sur la courbe, ou encore que par ce point on peut mener deux tangentes confondues à la courbe.

Une droite quelconque passant par le point M a pour coordonnées $\lambda u + \mu u_0$, $\lambda v + \mu v_0$, $\lambda w + \mu w_0$; cette droite sera tangente à la courbe si l'on a

$$f(\lambda u + \mu u_0, \quad \lambda v + \mu v_0, \quad \lambda w + \mu w_0) = 0,$$

et il faut écrire que cette équation a une racine double en $\frac{\lambda}{\mu}$.

Dans le cas où la courbe est de seconde classe, l'équation

qui précède est du second degré ; elle peut s'écrire

$$\lambda^2 f(u, v, w) + \lambda\mu(u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w) + \mu^2 f(u_0, v_0, w_0) = 0,$$

et pour qu'elle ait ses racines égales, on doit avoir

$$(u_0 f'_u + v_0 f'_u + w_0 f'_w)^2 - 4f(u, v, w) f(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

On a ainsi l'équation des points de rencontre de la droite et de la courbe.

On peut dire aussi que cette relation exprime que les deux droites (u_0, v_0, w_0) et (u, v, w) se coupent sur la conique.

84. Cherchons la condition pour que les deux points de rencontre de la droite (u_0, v_0, w_0) et de la conique soient réels.

Soit

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0$$

l'équation de la conique ; l'équation de l'ensemble des points de rencontre de cette courbe et de la droite (u_0, v_0, w_0) peut s'écrire

$$(uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0})^2 - 4f(u, v, w) f(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

Cette équation représentera deux points réels si l'on a (25)

$$[f'^2_{v_0} - 4a' f(u_0, v_0, w_0)][f'^2_{w_0} - 4a'' f(u_0, v_0, w_0)] \\ - [f'_{v_0} f'_{w_0} - 4b f(u_0, v_0, w_0)]^2 < 0.$$

On voit que $f(u_0, v_0, w_0)$ est en facteur, et la condition devient

$$f(u_0, v_0, w_0)[-a' f'^2_{w_0} - a'' f'^2_{v_0} + 2b f'_{v_0} f'_{w_0} + 4(a'a'' - b^2) f(u_0, v_0, w_0)] < 0$$

ou, en divisant par u_0^2,

$$\Delta f(u_0, v_0, w_0) < 0,$$

Δ désignant le discriminant de la fonction $f(u, v, w)$.

Nous obtenons ainsi la signification géométrique du signe du premier membre de l'équation tangentielle d'une conique.

Si $f(u_0, v_0, w_0)$ est nul, la droite (u_0, v_0, w_0) est tangente à la conique.

Si $f(u_0, v_0, w_0)$ est de signe contraire à Δ, cette droite rencontre la conique en deux points réels.

Enfin, si $f(u_0, v_0, w_0)$ a le signe de Δ, la droite rencontre la conique en deux points imaginaires.

85. Si la droite donnée est à l'infini, c'est-à-dire si $u_0 = v_0 = 0$, l'équation aux points de rencontre représentera les points à l'infini de la courbe, elle sera homogène en u et v, elle détermine les directions asymptotiques. En y faisant $u = m$ et $v = -1$, on aura l'équation aux coefficients angulaires de ces directions.

Examinons seulement le cas où $f(u, v, w)$ est du deuxième degré. Supposons

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0;$$

l'équation des points de rencontre avec la droite u_0, v_0, w_0 est

$$(u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w)^2 - 4f(u, v, w) f(u_0, v_0, w_0) = 0;$$

faisons $u_0 = v_0 = 0$ et $w_0 = 1$; il vient

$$f'^2_w - 4f(u, v, w)a'' = 0$$

ou

$$(b'u + bv + a''w)^2 - (au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv)a'' = 0$$

ou, en développant,

$$(b'^2 - aa'')u^2 + 2uv(bb' - a''b'') + (b^2 - a'a'')v^2 = 0,$$

ou encore, en introduisant les mineurs du discriminant,

$$A'u^2 - 2B''uv + Av^2 = 0;$$

l'équation aux coefficients angulaires des directions asymptotiques sera donc

$$A'm^2 + 2B''m + A = 0,$$

qui se déduit immédiatement de l'équation ponctuelle.

86. Tangentes aux points de rencontre d'une courbe et d'une droite. — Soient toujours la courbe C qui a pour équation tangentielle

$$f(u, v, w) = 0, \qquad (1)$$

et la droite $D(u_0, v_0, w_0)$.

Je considère une tangente à la courbe dont les coordonnées

u, v, w satisfont à l'équation (1), et j'écris que son point de contact est sur la droite D ; on a ainsi

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0. \tag{2}$$

Cette équation, jointe à (1), détermine les coordonnées des tangentes cherchées.

Si l'on suppose que la courbe soit algébrique et de classe m, l'équation (1) sera du m^e degré, l'équation (2) de degré $m-1$; nous aurons $m(m-1)$ solutions ; le degré de la courbe est donc $m(m-1)$.

Cette conclusion est en défaut si la courbe admet des tangentes multiples, car les coordonnées de ces tangentes annulant $f(u, v, w)$, f'_u, f'_v, f'_w vérifient les équations (1) et (2) quels que soient u_0, v_0, w_0.

On peut établir qu'une tangente double dont les points de contact sont distincts compte pour *deux* solutions; si les deux points de contact sont confondus, c'est-à-dire si la tangente est d'inflexion, elle compte pour *trois*.

Il en résulte que le degré de la courbe est inférieur à $m(m-1)$ si la courbe a des tangentes multiples ; si l'on désigne par t le nombre des tangentes doubles, par i le nombre des tangentes d'inflexion, et si l'on suppose que la courbe n'a pas de tangentes multiples d'ordre supérieur, le degré sera égal à

$$m(m-1) - 2t - 3i.$$

87. Si la droite donnée est à l'infini, les équations (1) et (2) se réduisent à

$$f(u, v, w) = 0,$$
$$f'_w = 0;$$

elles déterminent les coordonnées des asymptotes.

88. Dans le cas particulier où la courbe est de deuxième classe, l'équation (2) peut s'écrire

$$u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0} = 0.$$

Si l'on y considère u, v, w comme des coordonnées cou-

rantes, elle représente un point, par lequel passent les tangentes menées à la conique aux points de rencontre avec la droite D ; ce point est donc le pôle de la droite D ; ses coordonnées sont f'_{u_0}, f'_{v_0}, f'_{w_0}.

Ainsi nous obtenons un résultat important. Si une droite $D(u_0, v_0, w_0)$ est tangente à une conique d'équation

$$f(u, v, w) = 0,$$

les coordonnées du point de contact sont f'_{u_0}, f'_{v_0} et f'_{w_0}.

Si la droite n'est pas tangente, ces quantités sont les coordonnées homogènes du pôle de cette droite, l'équation de ce pôle pouvant s'écrire indifféremment

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} = 0$$

ou

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0.$$

89. **Normales et Développées.** — Soit (u', v', w') une tangente à la courbe qui a pour équation

$$f(u, v, w) = 0.$$

On aura

$$f(u', v', w') = 0 ;$$

le point de contact a pour coordonnées $f'_{u'}$, $f'_{v'}$, $f'_{w'}$; la normale en ce point étant perpendiculaire à la tangente, ses coordonnées u, v, w satisferont aux deux équations

$$uf'_{u'} + vf'_{v'} + wf'_{w'} = 0,$$

$$uu' + vv' - (uv' + vu') \cos\theta = 0,$$

θ désignant l'angle des axes.

En éliminant u', v', w' entre ces trois équations, on aura une relation entre u, v, w, que vérifieront les coordonnées de toutes les normales ; ce sera l'équation tangentielle de l'enveloppe des normales, c'est-à-dire de la développée.

On a donc ainsi une méthode pour obtenir l'équation tangentielle de la développée d'une courbe, connaissant l'équation tangentielle de cette courbe.

L'élimination est fort simple dans le cas où la courbe est de

deuxième classe, car les deux dernières équations sont du premier degré ; on peut alors les résoudre par rapport à u', v', w'.

Ces équations s'écrivent

$$u'f'_u + v'f'_v + w'f'_w = 0,$$

$$u'(u - v \cos \theta) + v'(v - u \cos \theta) = 0 ;$$

on en déduit

$$\frac{u'}{v - u \cos \theta} = \frac{v'}{-(u - v \cos \theta)} = \frac{-w'f'_w}{(v - u \cos \theta)f'_u - (u - v \cos \theta)f'_v}$$

ou

$$\frac{u'}{(v - u \cos \theta)f'_w} = \frac{v'}{-(u - v \cos \theta)f'_w} = \frac{w'}{(u - v \cos \theta)f'_v - (v - u \cos \theta)f'_u}.$$

En transportant ces valeurs de u', v', w' dans la relation

$$f(u', v', w') = 0,$$

on a

$$f[(v - u \cos \theta)f'_w, \quad -(u - v \cos \theta)f'_w, \quad (u - v \cos \theta)f'_v - (v - u \cos \theta)f'_u] = 0.$$

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, l'équation se simplifie et devient

$$f(vf'_w, \quad -uf'_w, \quad uf'_v - vf'_u) = 0.$$

Mais il est important d'observer que ces considérations ne s'appliquent qu'aux courbes de deuxième classe.

90. L'équation trouvée est du quatrième degré, par suite la développée est de quatrième classe ; il y a cependant exception dans le cas où la conique est une parabole.

Nous verrons plus tard que dans ce cas le coefficient de w^2 dans la fonction $f(u, v, w)$ est nul, de telle sorte que le premier membre de l'équation de la développée est divisible par f'_w. Si on égale ce facteur à zéro, on a l'équation d'un point à l'infini dans la direction de l'axe; ce résultat pouvait se voir *a priori*, car on sait que si une conique à centre se déforme de façon à avoir pour limite une parabole, parmi les quatre normales qu'on peut mener d'un point à cette conique, l'une

de ces normales a pour limite une parallèle à l'axe de la parabole. Il en résulte que les parallèles à l'axe d'une parabole peuvent être considérées comme des normales singulières, l'enveloppe de ces droites étant le point à l'infini dans la direction de l'axe.

En supprimant alors le facteur f'_w, il restera une équation du troisième degré en u, v, w, qui sera l'équation tangentielle de la développée. Cette courbe est donc dans ce cas de troisième classe.

91. Applications. — Considérons l'équation

$$f(u, v, w) = a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0,$$

qui représente une ellipse rapportée à ses axes. Pour avoir l'équation tangentielle de la développée, je calcule

$$f'_u = 2a^2u, \qquad f'_v = 2b^2v, \qquad f'_w = -2w,$$

et je remplace dans l'équation de la conique :

u par vf'_w, c'est-à-dire par $-2vw$;
v par $-uf'_w$, c'est-à-dire par $+2uw$;
w par $uf'_v - vf'_u$, c'est-à-dire par $2(b^2 - a^2)uv$.

L'équation de la développée est donc

$$a^2v^2w^2 + b^2u^2w^2 - (a^2 - b^2)^2u^2v^2 = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} - \frac{c^4}{w^2} = 0.$$

Si l'on a

$$f(u, v, w) = pv^2 - 2uw = 0,$$

c'est-à-dire si la conique est une parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, on formera l'équation de la développée par la méthode indiquée ; le premier membre sera divisible par u, et en supprimant ce facteur, on obtient

$$pu^3 + 2v^2(pu + w) = 0.$$

92. Connaissant l'équation tangentielle de la développée d'une courbe, on peut résoudre différentes questions relatives aux normales de cette courbe, en opérant comme nous l'avons fait sur les tangentes au début de ce chapitre.

Soit

$$\varphi(u, v, w) = 0$$

l'équation de la développée d'une courbe.

Les coordonnées des normales issues d'un point α, β satisferont aux deux équations

$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

$$u\alpha + v\beta + w = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires de ces normales sera

$$\varphi(m, -1, \beta - m\alpha) = 0,$$

et l'équation de l'ensemble de ces normales s'en déduira en remplaçant m par $\dfrac{y-\beta}{x-\alpha}$; on obtiendra

$$\varphi[y-\beta, -(x-\alpha), \beta x - \alpha y] = 0.$$

De même, l'équation

$$\varphi(m, -1, \lambda) = 0$$

donne les ordonnées à l'origine des normales qui ont pour coefficient angulaire m, et

$$\varphi(m, -1, y - mx) = 0$$

est l'équation de l'ensemble de ces normales.

On obtient ainsi pour l'ellipse et la parabole

$$y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}},$$

$$y = m(x-p) - \frac{pm^3}{2}.$$

EXERCICES ET NOTES

1. *Étant donnée la courbe* $x^m - y^p = 0$, *si d'un point de la courbe on lui mène deux tangentes, la droite qui joint les points de contact est tangente à la courbe.*

On prend deux points arbitraires sur la courbe, on détermine le point de concours des tangentes, et en écrivant que ce point est sur la courbe, on obtient la même condition qu'en écrivant que la droite joignant les points de contact est tangente à la courbe.

2. *Trouver l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues d'un point à une cissoïde, et l'équation du cercle passant par les trois points de contact.*

3. *Étant donnée la courbe* $4x^3 - 27y^2 = 0$, *trouver le lieu d'un point tel que, parmi les tangentes issues de ce point à la courbe, il y en ait deux parallèles à deux diamètres conjugués de la conique*

$$x^2 + y^2 + 2axy = B.$$

4. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe de classe* n *est en général de degré* $n(n-1)$.

5. **Courbes parallèles.** — *Sur la normale en un point quelconque* M *d'une courbe* C, *on porte une longueur constante* MP ; *le lieu du point* P *est une courbe* C_1. *Démontrer que les tangentes à ces deux courbes aux points correspondants* M *et* P *sont parallèles ; c'est pour cette raison que les courbes* C *et* C_1 *sont appelées courbes parallèles.*

Déduire l'équation tangentielle de C_1 *de l'équation tangentielle de* C.

On peut établir géométriquement que les tangentes aux deux courbes aux points correspondants sont parallèles. (J. Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 12).

Soient M, M' deux points voisins de la courbe C ; prenons sur les normales en ces points les points P et P' tels que $MP = M'P'$. Il s'agit de montrer que lorsque M' se rapproche indéfiniment de M, l'angle MPP' a pour limite un angle droit.

Abaissons M'K et P'K' perpendiculaires sur MP ; on a

$$KK' = M'P' \cos \varphi,$$

φ désignant l'angle des deux normales ; donc

$$MP - KK' = MP(1 - \cos \varphi),$$

et comme MM', PP', φ sont infiniment petits du premier ordre, $MP - KK'$ ou $MK - PK'$ est infiniment petit du deuxième ordre.

Or
$$MK = MM' \cos M'MK.$$

$\widehat{M'MK}$ a pour limite un droit, donc MK est infiniment petit du deuxième ordre ; il en est alors de même de PK'.

Mais on a
$$PK' = PP' \cos P'PK'.$$

Comme PP' est du premier ordre, il faut que $\widehat{P'PK'}$ ait pour limite un droit.

Analytiquement, soient x, y les coordonnées du point M, α, β les cosinus directeurs de la normale ; les coordonnées X, Y du point P seront déterminées par

$$X = x + l\alpha,$$
$$Y = y + l\beta,$$

l désignant la longueur MP.

On en déduit

$$dX = dx + ld\alpha,$$
$$dY = dy + ld\beta.$$

Multiplions respectivement ces équations par α et β, puis ajoutons :

$$\alpha dX + \beta dY = \alpha dx + \beta dy + l(\alpha d\alpha + \beta d\beta).$$

Or, on a $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; on en déduit $\alpha d\alpha + \beta d\beta = 0$.

D'autre part, on a aussi $\alpha dx + \beta dy = 0$, puisque la normale est perpendiculaire à la tangente ; on en déduit

$$\alpha dX + \beta dY = 0,$$

c'est-à-dire $$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}.$$

Soit alors $f(u, v, w) = 0$ l'équation de la courbe C ; à toute tangente, $ux + vy + w = 0$, de cette courbe correspond une tangente, $ux + vy + w' = 0$, de la courbe C_1, telle que la distance de ces deux tangentes soit égale à l ; on a donc

$$\frac{w - w'}{\sqrt{u^2 + v^2}} = l,$$

les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires.

On en déduit la valeur de w, et l'on voit que l'équation tangentielle de la courbe C_1 est, après avoir supprimé l'accent de w,

$$f(u, v, w + l\sqrt{u^2 + v^2}) = 0.$$

Si la courbe C est une ellipse,

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0,$$

la courbe parallèle sera

$$a^2u^2 + b^2v^2 - (w + l\sqrt{u^2 + v^2})^2 = 0$$

ou $$[a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 - l^2(u^2 + v^2)]^2 = 4l^2w^2(u^2 + v^2).$$

6. *Trouver l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux axes rectangulaires.*

C'est une courbe du sixième degré, de quatrième classe ; hypocycloïde à quatre rebroussements.

Trouver la développée de cette courbe.

7. *Trouver l'équation tangentielle de la développée de la cissoïde de Dioclès.*

8. Podaires. — On appelle podaire d'une courbe par rapport a un point, le lieu des projections du point sur les tangentes à la courbe.

Trouver l'équation de la podaire d'une courbe définie par son équation tangentielle.

On appelle podaire négative d'une courbe par rapport à un point une seconde courbe qui a pour podaire la première.

Étant donnée l'équation ponctuelle d'une courbe, déterminer l'équation tangentielle de sa podaire négative. Examiner en particulier le cas où la courbe donnée est une droite ou une conique.

9. *La différentielle de l'arc d'une podaire, $d\sigma$, est donnée par la formule*

$$d\sigma = \mathrm{OM}.ds,$$

ds désignant la différentielle de l'arc de la courbe, O *le point par rapport auquel on prend la podaire et* M *le point correspondant de la courbe donnée.*

10. *Construire la podaire de l'origine relativement à la courbe qui a pour équation ponctuelle* $x^3 + y^3 - a^3 = 0$.

11. *D'un point on peut mener* $2m - p$ *normales à la courbe*

$$y^m - max^p = 0 \qquad (m > p).$$

Démontrer que les pieds des normales sont situés sur une conique indépendante de la valeur de a.

12. *On donne deux droites* $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ *et une conique ; on mène une tangente variable à la conique qui rencontre* $\mathrm{O}x$ *en* A *et* $\mathrm{O}y$ *en* B. *On mène par* A *et* B *des parallèles à* $\mathrm{O}y$ *et à* $\mathrm{O}x$ *qui se coupent au point* M. *Trouver le lieu géométrique de ce point.*

On trouve une courbe du quatrième degré ; déterminer ses asymptotes.

13. Nous avons obtenu au numéro 83 la condition qui exprime que deux droites (u, v, w) et (u_0, v_0, w_0) se coupent sur la conique

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + \cdots = 0.$$

Cette condition est

$$(u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w)^2 - 4f(u, v, w)f(u_0, v_0, w_0) = 0. \qquad (1)$$

On peut mettre cette condition sous une autre forme remarqua-

ble en partant de l'équation ponctuelle de la conique

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + \cdots = 0.$$

Nous écrirons pour cela que la polaire du point de rencontre (x, y, z) des deux droites par rapport à la conique passe par ce point, c'est-à-dire qu'on a l'identité

$$X\varphi'_x + Y\varphi'_y + Z\varphi'_z \equiv 2\lambda(uX + vY + wZ) + 2\lambda'(u_0X + v_0Y + w_0Z),$$

ce qui donne, en égalant les coefficients de X, Y, Z,

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z - \lambda u - \lambda' u_0 &= 0, \\ B''x + A'y + Bz - \lambda v - \lambda' v_0 &= 0, \\ B'x + By + A''z - \lambda w - \lambda' w_0 &= 0, \end{aligned}$$

avec les relations

$$\begin{aligned} ux + vy + wz &= 0, \\ u'x + v'y + w'z &= 0. \end{aligned}$$

Ces cinq équations doivent avoir des solutions non toutes nulles en $x, y, z, \lambda, \lambda'$; pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait

$$D = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & u & u_0 \\ B'' & A' & B & v & v_0 \\ B' & B & A'' & w & w_0 \\ u & v & w & 0 & 0 \\ u_0 & v_0 & w_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad (2)$$

telle est la condition pour que les deux droites se coupent sur la conique.

Il est aisé de déduire analytiquement la condition (1) de la condition (2).

Multiplions les éléments des trois premières colonnes du déterminant respectivement par $\frac{1}{2}f'_u$, $\frac{1}{2}f'_v$, $\frac{1}{2}f'_w$, et ajoutons ces produits aux éléments de la quatrième colonne, après avoir multiplié ces derniers par $-\Delta$.

Les trois premiers éléments de la quatrième colonne sont alors nuls, car on voit aisément que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(Af'_u + B''f'_v + B'f'_w) &= \Delta u, \\ \frac{1}{2}(B''f'_u + A'f'_v + Bf'_w) &= \Delta v, \\ \frac{1}{2}(B'f'_u + Bf'_v + A''f'_w) &= \Delta w. \end{aligned}$$

De même, multiplions les éléments des trois premières colonnes respectivement par $\frac{1}{2}f'_{u_0}$, $\frac{1}{2}f'_{v_0}$, $\frac{1}{2}f'_{w_0}$ et ajoutons ces produits aux éléments de la cinquième colonne multipliés par $-\Delta$.

Si l'on pose

$$H = uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} = u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w,$$

et si l'on remarque que le déterminant a été multiplié par Δ^2, on aura

$$D\Delta^2 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & 0 & 0 \\ B'' & A' & B & 0 & 0 \\ B' & B & A'' & 0 & 0 \\ u & v & w & f(u, v, w) & \frac{1}{2}H \\ u_0 & v_0 & w_0 & \frac{1}{2}H & f(u_0, v_0, w_0) \end{vmatrix} = 0$$

ou encore

$$D\Delta^2 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f(u, v, w) & \frac{1}{2}H \\ \frac{1}{2}H & f(u_0, v_0, w_0) \end{vmatrix}$$

$$4D = 4f(u, v, w)f(u_0, v_0, w_0) - (u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w)^2;$$

les conditions (1) et (2) sont donc les mêmes.

Corrélativement, la condition pour que les deux points (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) soient situés sur une tangente à la conique, ou encore l'équation de l'ensemble des tangentes issues du point (x_0, y_0, z_0) à cette conique peut s'écrire indifféremment

$$4\varphi(x, y, z)\varphi(x_0, y_0, z_0) - (x_0\varphi'_x + y_0\varphi'_y + z_0\varphi'_z)^2 = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & x & x_0 \\ b'' & a' & b & y & y_0 \\ b' & b & a'' & z & z_0 \\ x & y & z & 0 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

CHAPITRE V

CLASSIFICATION DES COURBES DE DEUXIÈME CLASSE

---

93. L'équation générale des courbes de deuxième classe est

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0. \quad (1)$$

Nous rappellerons ici les notations et les formules fort importantes écrites déjà au numéro 25 :

$$A = a'a'' - b^2, \qquad B = b'b'' - ab,$$
$$A' = a''a - b'^2, \qquad B' = b''b - a'b',$$
$$A'' = aa' - b''^2, \qquad B'' = bb' - a''b'',$$

$$A'A'' - B^2 = a\Delta, \qquad B'B'' - AB = b\Delta,$$
$$A''A - B'^2 = a'\Delta, \qquad B''B - A'B' = b'\Delta.$$
$$AA' - B''^2 = a''\Delta, \qquad BB' - A''B'' = b''\Delta.$$

Δ désigne le discriminant de la fonction $f(u, v, w)$; on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix};$$

et les grandes lettres A, A', A'', B, B', B'' représentent les coefficients des petites lettres correspondantes dans le développement de Δ.

C'est ainsi qu'on peut écrire

$$\Delta = Aa + B''b'' + B'b',$$
$$\Delta = B''b'' + A'a' + Bb,$$
$$\Delta = B'b' + Bb + A''a'',$$

en développant le déterminant par rapport aux éléments des lignes ou des colonnes.

Rappelons encore que l'équation ponctuelle de la conique est

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

et que l'on a

$$\varphi(x, y, z) \equiv - \begin{vmatrix} a & b'' & b' & x \\ b'' & a' & b & y \\ b' & b & a'' & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}.$$

Si $\Delta = 0$, $\varphi(x, y, z)$ est le carré d'une fonction linéaire qui, égalée à zéro, représente la droite qui joint les deux points dont l'équation (1) est l'équation tangentielle.

94. Nous avons déjà étudié le cas où $\Delta = 0$ (23 et suivants) ; nous nous bornerons maintenant au cas où $\Delta \neq 0$.

Une première classification est donnée immédiatement par la considération des points à l'infini.

Nous avons vu (85) que l'équation des points à l'infini de la conique représentée par l'équation (1) est

$$A'u^2 - 2B''uv + Av^2 = 0.$$

Le discriminant du premier membre est $AA' - B''^2$ ou $a''\Delta$.

Si $a''\Delta > 0$, les points à l'infini sont imaginaires ; la conique est du *genre ellipse*.

Si $a'\Delta < 0$, les points à l'infini sont réels et distincts ; la conique est du *genre hyperbole*.

Enfin, si $a''\Delta = 0$, c'est-à-dire si $a'' = 0$ (puisque nous supposons $\Delta \neq 0$), les points à l'infini sont confondus ; la conique est du *genre parabole*.

Dans ce dernier cas, d'ailleurs, l'équation (1) est satisfaite par les coordonnées de la droite de l'infini $u = 0$, $v = 0$; on en conclut que la courbe est tangente à cette droite.

95. Pour établir d'une façon plus approfondie la nature de

la conique dans chacun des trois cas cités plus haut, nous décomposerons le premier membre de l'équation en carrés, et nous changerons les axes de coordonnées en nous servant des formules de transformation (6) établies au numéro 34.

96. Premier cas. $a'' \neq 0$.

La conique est du genre ellipse ou hyperbole.

On peut écrire

$$f(u, v, w) = \frac{1}{a''}(a''w + b'u + bv)^2 - \frac{(b'u + bv)^2}{a''} + au^2 + a'v^2 + 2b''uv$$

ou

$$a''f(u, v, w) = (a''w + b'u + bv)^2 + A'u^2 + Av^2 - 2B''uv.$$

1° Supposons que l'un des coefficients A ou A′ soit différent de zéro, par exemple $A' \neq 0$.

On pourra écrire

$$a''f(u, v, w) = (a''w + b'u + bv)^2 + \frac{1}{A'}(A'u - B''v)^2 - \frac{B''^2}{A'}v^2 + Av^2$$

ou

$$f(u, v, w) = \frac{1}{a''A'}\left[A'(a''w + b'u + bv)^2 + (A'u - B''v)^2 + a''\Delta v^2\right].$$

Faisons maintenant la transformation de coordonnées indiquée par les formules suivantes :

$$u' = \frac{A'u - B''v}{\sqrt{A'^2 + B''^2 - 2A'B''\cos\theta}}, \quad (1)$$

$$v' = v,$$

$$w' = \frac{b'}{a''}u + \frac{b}{a''}v + w.$$

Cela revient à prendre pour nouvelle origine O′ le point qui a pour coordonnées $\frac{b'}{a''}$ et $\frac{b}{a''}$, pour direction de l'axe des x' une parallèle à la droite qui joint l'origine O au point de coor-

---

(1) Nous plaçons au dénominateur de l'expression de u' la quantité $\sqrt{A'^2 + B''^2 - 2A'B''\cos\theta}$, afin que le point qui a pour coordonnées $\frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B''^2 - 2A'B''\cos\theta}}$ et $\frac{-B''}{\sqrt{A'^2 + B''^2 - 2A'B''\cos\theta}}$ soit à l'unité de distance de l'origine, conformément aux formules (6) du numéro 34.

données $\frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B''^2 - 2A'B'' \cos \theta}}$ et $\frac{-B''}{\sqrt{A'^2 + B''^2 - 2A'B'' \cos \theta}}$,
l'axe des y' restant parallèle à Oy.

L'équation de la courbe devient alors

$$(A'^2 + B''^2 - 2A'B'' \cos \theta)u'^2 + a''\Delta v'^2 + A'a''^2 w'^2 = 0.$$

On reconnaît là l'équation tangentielle d'une conique dont l'équation ponctuelle est (40)

$$\frac{x'^2}{A'^2 + B''^2 - 2A'B'' \cos \theta} + \frac{y'^2}{a''\Delta} + \frac{1}{A'a''^2} = 0.$$

Si $a''\Delta > 0$, la conique est du genre ellipse. Cette ellipse est réelle si $A' < 0$, imaginaire dans le cas contraire.

Remarquons que dans ce cas A et A′ sont de même signe et qu'on peut s'adresser à l'une ou à l'autre de ces quantités pour distinguer la réalité de la courbe.

Si $a''\Delta < 0$, la courbe est une hyperbole.

Il est utile d'observer que, cette courbe étant rapportée à son centre, les coordonnées de ce centre sont par rapport aux premiers axes $\frac{b'}{a''}$ et $\frac{b}{a''}$.

2° Supposons maintenant $A = A' = 0$; B'' doit être différent de zéro puisque

$$AA' - B''^2 = a''\Delta \neq 0.$$

Nous pouvons écrire

$$a''f(u, v, w) = (a''w + b'u + bv)^2 - \frac{B''}{2}(u+v)^2 + \frac{B''}{2}(u-v)^2.$$

Faisons alors la transformation de coordonnées

$$u' = \frac{u+v}{\sqrt{2+2\cos\theta}},$$

$$v' = \frac{u-v}{\sqrt{2-2\cos\theta}},$$

$$w' = \frac{b'}{a''}u + \frac{b}{a''}v + w;$$

l'équation devient

$$a''^2 w'^2 - B''(1+\cos\theta)u'^2 + B''(1-\cos\theta)v'^2 = 0,$$

et l'équation ponctuelle de cette courbe est

$$\frac{x'^2}{B''(1+\cos\theta)} - \frac{y'^2}{B''(1-\cos\theta)} - \frac{1}{a''^2} = 0.$$

Elle représente visiblement une hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués.

Remarquons que dans ce cas $a''\Delta$ est négatif, puisque cette quantité se réduit à $-B''^2$.

Il en résulte que les conclusions de la première partie du premier cas sont générales pour ce cas, c'est-à-dire :

$a''\Delta > 0$, ellipse réelle ou imaginaire, selon que les deux quantités de même signe A ou A' sont négatives ou positives ;

$a''\Delta < 0$, hyperbole.

97. Deuxième cas. $a'' = 0$.

Nous diviserons encore ce cas en deux parties.

1° *Les deux coefficients* a *et* a' *ne sont pas nuls en même temps*, par exemple $a \neq 0$.

Commençons la décomposition en carrés en ordonnant le premier membre par rapport aux puissances de u ; on aura

$$f(u, v, w) = \frac{1}{a}(au + b''v + b'w)^2 - \frac{(b''v + b'w)^2}{a} + a'v^2 + 2bvw,$$

$$af(u, v, w) = (au + b''v + b'w)^2 + (aa' - b''^2)v^2 - 2(b'b'' - ab)vw - b'^2w^2,$$

et en supposant $b' \neq 0$,

$$af(u, v, w) = (au + b''v + b'w)^2 - \left(b'w + \frac{b'b'' - ab}{b'}v\right)^2 + v^2\left[aa' - b''^2 + \frac{(b'b'' - ab)^2}{b'^2}\right].$$

Remplaçons les deux premiers termes par un produit de deux facteurs, et remarquons que le coefficient de v^2 peut s'écrire

$$\frac{a(ab^2 + a'b'^2 - 2bb'b'')}{b'^2},$$

c'est-à-dire $-\frac{a\Delta}{b'^2}$; il vient alors

$$f(u, v, w) = \frac{b'u + bv}{b'}\left[au + \left(2b'' - \frac{ab}{b'}\right)v + 2b'w\right] - \frac{\Delta}{b'^2}v^2.$$

Faisons la transformation de coordonnées :

$$u' = \frac{b'u + bv}{\sqrt{b'^2 + b^2 + 2bb' \cos \theta}},$$

$$v' = v,$$

$$w' = \frac{1}{2b'}\left[au + \left(2b'' - \frac{ab}{b'}\right)v + 2b'w\right];$$

l'équation prend la forme

$$v'^2 + 2\alpha u'w' = 0,$$

qui représente une parabole dont l'équation ponctuelle est (40)

$$\alpha y'^2 + 2x' = 0;$$

on voit ainsi que la direction asymptotique qui est $O'x'$ a pour paramètres directeurs b' et b.

Si $b' = 0$, on a

$$\Delta = -ab^2,$$

de sorte que ni a ni b ne peuvent être nuls.

On écrira alors

$$f(u, v, w) = au^2 + v(2b''u + a'v + 2bw).$$

Nous ferons la transformation de coordonnées :

$$u' = u,$$

$$v' = v,$$

$$w' = \frac{2b''u + a'v + 2bw}{2b};$$

l'équation devient

$$au'^2 + 2bw'v' = 0;$$

elle représente une parabole dont l'équation ponctuelle est (40)

$$\frac{x'^2}{a} + \frac{2y'}{b} = 0;$$

la direction asymptotique est $O'y'$, c'est-à-dire Oy, puisque les nouveaux axes sont parallèles aux premiers.

On peut donc dire que cette direction a pour paramètres directeurs b' et b.

2° *Supposons maintenant* $a = a' = 0$.

On a

$$\Delta = 2bb'b'';$$

aucun des trois nombres b, b' ou b'' ne peut être nul.

On aura

$$f(u, v, w) = 2bvw + 2b'wu + 2b''uv.$$

On peut écrire

$$f(u, v, w) = \frac{2}{b'}(b'u + bv)(b'w + b''v) - \frac{2bb''}{b'}v^2 = 0.$$

Faisons la transformation :

$$u' = \frac{b'u + bv}{\sqrt{b'^2 + b^2 + 2bb' \cos \theta}},$$

$$v' = v,$$

$$w' = \frac{b''v + b'w}{b'}.$$

L'équation prend la forme

$$v'^2 + 2\alpha u'w' = 0;$$

elle représente une parabole qui a pour équation ponctuelle

$$\alpha y'^2 + 2x' = 0;$$

la direction asymptotique a encore pour paramètres directeurs b' et b.

En définitive, on voit que si

$$a'' = 0, \qquad \Delta \neq 0,$$

l'équation (1) représente une parabole dont la direction asymptotique a pour paramètres directeurs b' et b.

98. On peut résumer la discussion dans le tableau suivant, les résultats relatifs au cas où Δ est nul se déduisant des considérations présentées au numéro 25.

$\Delta \neq 0$	$a''\Delta > 0$	A ou $A' < 0$		Ellipse réelle.
		A ou $A' > 0$		Ellipse imaginaire.
	$a''\Delta < 0$			Hyperbole.
	$a'' = 0$			Parabole.
$\Delta = 0$	$a'' \neq 0$	A ou $A' < 0$		2 points réels à distance finie.
		A ou $A' > 0$		2 points imaginaires à distance finie.
		$A = A' = 0$		2 points confondus à distance finie.
	$a'' = 0$	b ou $b' \neq 0$		2 points réels dont l'un à l'infini.
		$b = b' = 0$	$A'' < 0$	2 points réels à l'infini.
			$A'' > 0$	2 points imaginaires à l'infini.
			$A'' = 0$	2 points confondus à l'infini.

99. Exemples numériques.

1° Considérons l'équation

$$u^2 + w^2 + 2vw - 2uv = 0.$$

Comme le coefficient de w^2 n'est pas nul, on voit tout de suite que la conique est une ellipse ou une hyperbole, ou se réduit à deux points à distance finie. On pourrait, pour distinguer ces différents cas, former l'expression de Δ ; mais il sera préférable d'opérer directement, car de la discussion résultera sans peine la position de la courbe dans le plan.

L'équation peut s'écrire, en décomposant en carrés,

$$(w + v)^2 + u^2 - 2uv - v^2 = 0$$

ou

$$(w + v)^2 + (u - v)^2 - 2v^2 = 0.$$

Supposons les axes de coordonnées rectangulaires, et faisons la transformation :

$$u' = \frac{u - v}{\sqrt{2}},$$

$$v' = v,$$

$$w' = w + v;$$

l'équation devient

$$w'^2 + 2u'^2 - 2v'^2 = 0,$$

et l'équation ponctuelle correspondante est

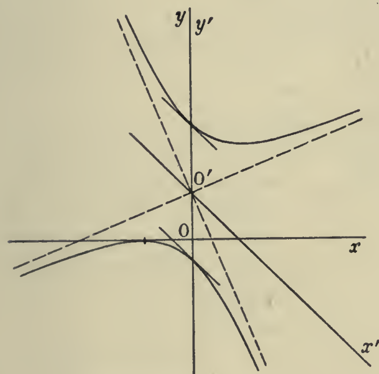
$$x'^2 - y'^2 + 2 = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une hyperbole équilatère rapportée à deux diamètres conjugués.

Pour la construire, remarquons que le centre a pour équation

$$w + v = 0\,;$$

ses coordonnées sont donc 0 et 1, c'est le point O'. La direction $O'x'$ a pour point directeur le point $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et l'axe des y' est parallèle à Oy. Il est alors aisé de construire la courbe. Les asymptotes sont les bissectrices de $O'x'$ et $O'y'$; la courbe rencontre $O'y'$ aux points dont les ordonnées par rapport aux nouveaux axes sont $\pm\sqrt{2}$, les tangentes en ces points étant parallèles à $O'x'$. On peut remarquer que l'équation étant satisfaite pour $u = 0$, $w = 0$, la courbe est tangente à Ox au point qui a pour équation



$$\frac{1}{2} f'_v = w - u = 0,$$

c'est-à-dire pour coordonnées -1 et 0.

2° *Construire la courbe qui a pour équation*

$$u^2 - 4uv + 4v^2 - 2uw + vw = 0.$$

Comme le coefficient de w^2 est nul, l'équation représente une parabole ou un système de deux points dont l'un est à l'infini.

Décomposons en carrés; l'équation s'écrit

$$(u - 2v - w)^2 - (2v + w)^2 + 4v^2 + vw = 0$$

ou

$$(u - 2v - w)^2 - w^2 - 3vw = 0$$

ou encore

$$(u - 2v - w)^2 - \left(w + \frac{3v}{2}\right)^2 + \frac{9v^2}{4} = 0.$$

Les deux premiers carrés peuvent se remplacer par un produit et

l'équation devient

$$(2u - v)(2u - 7v - 4w) + 9v^2 = 0.$$

Faisons la transformation de coordonnées :

$$u' = \frac{2u - v}{\sqrt{5}},$$
$$v' = v,$$
$$w' = -\frac{2u - 7v - 4w}{4}.$$

Nous supposons les axes primitifs de coordonnées rectangulaires. Le point O′ a pour coordonnées $-\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{4}$, l'axe $O'x'$ a pour paramètres directeurs 2 et -1, $O'y'$ est parallèle à Oy.

L'équation transformée de la courbe s'écrit

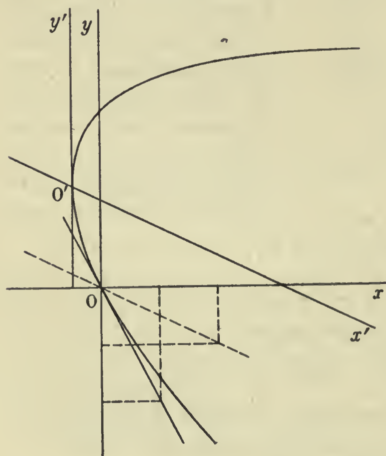
$$9v'^2 - 4u'w'\sqrt{5} = 0.$$

L'équation ponctuelle est

$$y'^2\sqrt{5} - 9x' = 0;$$

elle représente une parabole aisée à construire.

On peut remarquer en outre que l'origine O est située sur la courbe, attendu que les tangentes issues de ce point à la courbe, ayant leurs directions déterminées par



$$u^2 - 4uv + 4v^2 = (u - 2v)^2 = 0,$$

sont confondues. La tangente à l'origine a pour paramètres directeurs 1 et -2.

En écrivant l'équation de la courbe sous la forme

$$(u - 2v)^2 - w(2u - v) = 0,$$

on reconnaissait immédiatement que l'équation représentait une parabole, puisque $2u - v$ ne divise pas l'ensemble des termes du second degré en u et v.

3° *Reconnaître la nature de la conique dont l'équation tangentielle est*

$$u^2 + \lambda v^2 + (\lambda^2 - 4)w^2 - 2\lambda vw + 4uw - 3uv = 0,$$

suivant les différentes valeurs du paramètre λ.

Il sera plus commode dans les questions de ce genre de se repor-

ter au tableau du n° 98 qui résume la discussion; nous allons calculer Δ et A ou A'.

On a d'abord $\Delta = \frac{1}{4}(4\lambda^3 - 13\lambda^2 - 8\lambda + 36)$;

le second membre s'annule pour $\lambda = 2$; on peut écrire

$$\Delta = \frac{1}{4}(\lambda - 2)(4\lambda^2 - 5\lambda - 18),$$

et comme $a'' = \lambda^2 - 4$,

on a $a''\Delta = \frac{1}{4}(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)(4\lambda^2 - 5\lambda - 18)$.

Le trinome $4\lambda^2 - 5\lambda - 18$ a ses racines réelles et de signes contraires; nous les désignerons par λ' et λ''. Enfin il faut aussi connaître le signe de A ou de A'; nous considérerons ici A' qui est plus simple que A,

$$A' = \lambda^2 - 8.$$

Les valeurs remarquables de λ, rangées par ordre de grandeur, sont

$$-2\sqrt{2}, \quad -2, \quad \lambda', \quad 2, \quad 2\sqrt{2}, \quad \lambda''.$$

On en déduit immédiatement le tableau qui suit

λ	$a''\Delta$	A'	Nature de la conique
$-\infty$			
	$-$	$+$	Hyperbole.
$-2\sqrt{2}$			
	$-$	$-$	
-2			Parabole.
	$+$	$-$	Ellipse réelle.
λ'			2 points réels à distance finie.
	$-$	$-$	Hyperbole.
2			2 points réels dont l'un est à l'infini.
	$-$	$-$	Hyperbole.
$2\sqrt{2}$			
	$-$	$+$	
λ''			2 points imaginaires à distance finie.
	$+$	$+$	Ellipse imaginaire.
$+\infty$			

100. Les tangentes menées à la conique par l'origine sont déterminées par les équations

$$au^2 + a'v^2 + 2b''uv = 0,$$
$$w = 0.$$

Si $aa' - b''^2 > 0$, ces tangentes sont imaginaires ; si $aa' - b''^2 < 0$, ces tangentes sont réelles et leurs coefficients angulaires sont racines de l'équation

$$am^2 - 2b''m + a' = 0.$$

Enfin, si $aa' - b''^2 = 0$, $au^2 + a'v^2 + 2b''uv$ est carré parfait, les deux tangentes sont confondues, la courbe passe par l'origine.

Ainsi l'équation tangentielle générale des coniques passant par l'origine et admettant en ce point une tangente de coefficient angulaire m est

$$(u + vm)^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0.$$

Ce résultat peut s'obtenir immédiatement en observant que d'après le principe de dualité (50 et suivants), à une parabole correspond une conique passant par l'origine.

101. Conditions pour que l'équation générale du second degré en u, v, w représente un cercle.

Pour avoir l'équation tangentielle d'un cercle, nous écrirons qu'une droite, $ux + vy + w = 0$, est à une distance constante d'un point donné.

On a ainsi

$$\frac{(u\alpha + v\beta + w)^2 \sin^2 \theta}{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta} = R^2,$$

α et β désignant les coordonnées du centre, R le rayon et θ l'angle des axes.

Cette équation peut aussi s'écrire

$$\frac{(u\alpha + v\beta + w)^2 \sin^2 \theta}{R^2} - (u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta) = 0.$$

Pour que l'équation

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0 \quad (1)$$

représente un cercle, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer les nombres α, β, R et λ, en sorte qu'on ait l'identité

$$f(u, v, w) \equiv \lambda \left[\frac{(u\alpha + v\beta + w)^2 \sin^2 \theta}{R^2} - (u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta)\right]$$

ou

$$f(u, v, w) + \lambda (u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta) \equiv \lambda \cdot \frac{(u\alpha + v\beta + w)^2 \sin^2 \theta}{R^2}.$$

On déduit de là que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) représente un cercle est qu'il existe un nombre λ en sorte que $f(u, v, w) + \lambda(u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta)$ soit le carré d'une fonction linéaire.

Remarquons d'abord que a'' doit être différent de zéro, sans quoi l'expression qui précède, devant être carré parfait, ne pourrait renfermer la variable w; on devrait avoir $b = b' = 0$; $f(u, v, w)$ se réduirait à une fonction homogène de u et de v et l'équation représenterait deux points à l'infini.

Le coefficient de w^2 n'étant pas nul, pour que l'expression $f(u, v, w) + \lambda (u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta)$ soit carré parfait, il faut et il suffit que les mineurs de son discriminant qui contiennent a'' soient nuls.

On aura

$$a''(a + \lambda) - b'^2 = 0,$$
$$a''(a' + \lambda) - b^2 = 0,$$
$$a''(b'' - \lambda \cos \theta) - bb' = 0.$$

Ces trois équations doivent donner pour λ la même valeur : on aura donc

$$a'a'' - b^2 = a''a - b'^2 = \frac{bb' - a''b''}{\cos \theta}$$

ou

$$A = A' = \frac{B''}{\cos \theta}.$$

Dans le cas où les axes sont rectangulaires, ces conditions s'écrivent

$$A = A', \qquad B'' = 0.$$

Ces résultats pouvaient s'obtenir immédiatement en partant de l'équation ponctuelle.

Supposons ces conditions remplies, et proposons-nous de déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle représenté par l'équation (1).

On a l'identité

$$f(u, v, w) + \lambda(u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta) \equiv \frac{1}{a''}(a''w + b'u + bv)^2,$$

λ étant égal à l'un des nombres $-\frac{A}{a''}$ ou $-\frac{A'}{a''}$.

On aura donc

$$f(u, v, w) \equiv a''\left(\frac{b'}{a''}u + \frac{b}{a''}v + w\right)^2 + \frac{A}{a''}(u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta),$$

de telle sorte que l'équation du cercle s'écrit

$$\frac{\left(\frac{b'}{a''}u + \frac{b}{a''}v + w\right)^2 \sin^2 \theta}{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta} = -\frac{A \sin^2 \theta}{a''^2}.$$

Il en résulte que les coordonnées du centre sont $\frac{b'}{a''}$ et $\frac{b}{a''}$, et que le rayon R est donné par

$$R^2 = -\frac{A \sin^2 \theta}{a''^2}.$$

On voit ainsi que le cercle n'est réel que si A est négatif.

102. Pour que l'équation (1) représente une hyperbole équilatère, il faut que les directions asymptotiques soient rectangulaires.

Or nous avons vu (85) que l'équation aux coefficients angulaires des asymptotes était

$$A'm^2 + 2B''m + A = 0.$$

Pour que ces directions soient perpendiculaires, il faut qu'on ait

$$A + A' - 2B'' \cos \theta = 0,$$

θ désignant l'angle des axes.

Si les axes sont rectangulaires, la condition devient

$$A + A' = 0.$$

EXERCICES ET NOTES

1. *Déterminer la nature des coniques représentées par les équations*

$$u^2 - v^2 + 3w^2 - 2uw = 0,$$

$$u^2 + w^2 - uv = 0,$$

$$vw + wu + 2uv = 0,$$

$$(u - v)^2 - 2vw = 0,$$

$$u^2 + w^2 - vw - 2wu + uv = 0.$$

2. *Discuter la nature des coniques représentées par l'équation*

$$u^2 + 2v^2 + (\lambda^2 - 1)w^2 - 2\lambda vw + 2uw - 3\lambda uv = 0,$$

quand le paramètre λ *varie.*

3. *Discuter la nature des coniques représentées par l'équation*

$$\alpha u^2 - v^2 + \beta w^2 - 2\alpha vw - 2uv = 0,$$

lorsque le point (α, β) *se déplace dans le plan.*

4. *On donne un cercle, une droite* D *et un point* A*; par le point* A*, on mène une droite quelconque qui rencontre la droite* D *au point* B. *Trouver l'enveloppe de la droite qui joint le point* B *au pôle de la droite* AB *par rapport au cercle.*

Cette enveloppe est une conique; discuter la nature de cette conique en supposant que le point A *se déplace dans le plan, le cercle et la droite* D *restant fixes.*

Soient $x^2 + y^2 - R^2 = 0, \qquad y - m = 0$

les équations du cercle et de la droite, et α, β les coordonnées du point A.

Soit $ux + vy + w = 0$ l'équation d'une des droites dont on cherche l'enveloppe ; elle rencontre la droite D au point B $\left(y = m, \quad x = -\frac{vm + w}{u}\right)$; je forme l'équation de la droite AB, et j'écris que son pôle est sur la droite $ux + vy + w = 0$.

On trouve ainsi pour équation tangentielle de l'enveloppe,

$$R^2(m - \beta)u^2 + R^2mv^2 + \beta w^2 + (R^2 + m\beta)vw + m\alpha wu + R^2\alpha uv = 0.$$

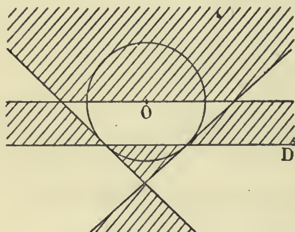
Pour discuter cette conique, je forme

$$\Delta = \frac{R^2}{4}(m - \beta)[\alpha^2(R^2 - m^2) - (R^2 - m\beta)^2],$$

$$a''\Delta = \frac{R^2}{4}\beta(m - \beta)[\alpha^2(R^2 - m^2) - (R^2 - m\beta)^2].$$

Remarquons que si on considère α et β comme coordonnées courantes, l'équation

$$\alpha^2(R^2 - m^2) - (R^2 - m\beta)^2 = 0$$



représente l'ensemble des tangentes menées au cercle aux points de rencontre avec la droite D.

En supposant que cette droite rencontre le cercle en des points réels, on voit aisément que si le point A est dans les régions du plan couvertes de hachures, l'enveloppe est une ellipse, car $a''\Delta$ est positif; au contraire si le point A est dans les autres régions, l'enveloppe est une hyperbole.

On peut remarquer que les ellipses sont toujours réelles, puisque le mineur A par exemple est égal à $R^2 m\beta - \frac{(R^2 + m\beta)^2}{4}$ ou à $-\frac{(R^2 - m\beta)^2}{4}$, quantité négative.

L'enveloppe est une parabole si $\beta = 0$, c'est-à-dire si le point A est sur le diamètre du cercle parallèle à la droite D.

Enfin si le point A est sur les autres droites de la figure, l'équation représente deux points.

On examinera d'une manière semblable le cas où la droite D ne rencontre pas le cercle.

Tous ces résultats peuvent d'ailleurs s'obtenir aisément par de simples considérations géométriques.

5. *Trouver l'enveloppe d'une droite s'appuyant sur deux droites données et ayant son milieu sur une autre droite donnée.*

6. *On donne une ellipse et un point* A ; *par ce point on mène une droite quelconque, du pôle* B *de cette droite par rapport à l'ellipse on abaisse une perpendiculaire sur cette même droite ; trouver l'enveloppe de cette perpendiculaire.*

Soit $ux + vy + w = 0$ l'équation d'une des droites Δ dont on cherche l'enveloppe; du point A (α, β) j'abaisse une perpendiculaire

sur cette droite et j'écris que le pôle de la perpendiculaire est sur la droite Δ. On obtient ainsi l'équation tangentielle de l'enveloppe,

$$c^2uv + \alpha vw - \beta uw = 0,$$

qui représente une parabole tangente aux axes de l'ellipse, et qui reste la même pour toutes les coniques homofocales.

7. *Enveloppe de la droite qui joint les projections d'un point quelconque d'une parabole sur l'axe et la tangente au sommet.*

8. *Enveloppe d'une droite qui joint les points homologues de deux divisions homographiques. Discuter la nature de la conique obtenue.*

9. *Enveloppe d'une corde d'une conique vue d'un point fixe sous un angle droit. Cas où le point est sur la conique.*

10. *L'une des asymptotes d'une conique circonscrite à un triangle passe par un point fixe ; trouver l'enveloppe de l'autre asymptote.*

Soit OAB le triangle ; prenons OA et OB pour axes et soient x_0, y_0 les coordonnées du point fixe.

L'une des asymptotes aura pour équation $y - y_0 - m(x - x_0) = 0$; soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de l'autre asymptote ; l'équation de la conique s'écrit

$$[y - y_0 - m(x - x_0)](ux + vy + w) + k = 0.$$

Écrivons que cette conique passe par les sommets du triangle donné ; on a trois équations entre lesquelles on éliminera aisément m et k. On trouve pour équation tangentielle de l'enveloppe

$$[u(a - x_0) + w][v(b - y_0) + w] - x_0y_0uv = 0.$$

Discuter la nature de cette conique et la construire.

11. *Trouver l'enveloppe d'une droite telle que le produit de ses distances à deux points fixes soit constant.*

12. *Trouver l'enveloppe d'une droite telle que la somme des carrés de ses distances à deux points fixes soit constante.*

13. *On donne deux droites* Ox, Oy *et un point* A. *Un cercle quelconque passant par* O *et* A *coupe les droites en* B *et* C. *Enveloppe de la droite* BC.

Soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite BC. Le cercle

passant par les points O, B, C a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta + \frac{w}{u}x + \frac{w}{v}y = 0;$$

j'écris que ce cercle passe par le point A (x_0, y_0); on a l'équation tangentielle de l'enveloppe,

$$x_0^2 + 2x_0y_0 \cos\theta + y_0^2 + \frac{w}{u}x_0 + \frac{w}{v}y_0 = 0,$$

qui représente une parabole tangente aux deux droites.

14. *De chaque point d'une droite on abaisse des perpendiculaires sur deux autres droites ; enveloppe de la droite qui joint leurs deux pieds.*

15. *On donne une conique tangente à deux droites* Ox *et* Oy. *Une tangente quelconque à cette conique rencontre ces droites en* A *et* B. *Lieu du quatrième sommet du parallélogramme construit sur* OA *et* OB.

16. *On donne un cercle et un point* A. *Par ce point on mène une sécante* ABC*; on joint le point* B *au point* C' *diamétralement opposé à* C. *Enveloppe de la droite* BC'.

17. *Étant données deux tangentes à une conique, on leur mène des parallèles par les différents points de la corde de contact; trouver l'enveloppe de la diagonale du parallélogramme ainsi formé, qui est opposée au point de concours des tangentes. Cas où la conique est une parabole.*

CHAPITRE VI

POLES ET POLAIRES

103. Droites conjuguées. — On dit que deux droites sont conjuguées par rapport à une conique lorsqu'elles divisent harmoniquement les tangentes menées à la conique par leur point de rencontre.

Soit la conique représentée par l'équation

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0. \qquad (1)$$

Considérons deux droites ayant pour coordonnées u_0, v_0, w_0 et u_1, v_1, w_1. et proposons-nous de trouver la condition pour que ces deux droites soient conjuguées par rapport à la conique.

Une droite quelconque passant par l'intersection de ces deux droites a pour coordonnées $\lambda u_0 + \mu u_1$, $\lambda v_0 + \mu v_1$ et $\lambda w_0 + \mu w_1$; les valeurs de λ et de μ correspondant aux tangentes issues de ce point à la conique seront déterminées par l'équation

$$f(\lambda u_0 + \mu u_1, \quad \lambda v_0 + \mu v_1, \quad \lambda w_0 + \mu w_1) = 0,$$

ou, en développant,

$$\lambda^2 f(u_0, v_0, w_0) + \lambda\mu[u_1 f'_{u_0} + v_1 f'_{v_0} + w_1 f'_{w_0}) + \mu^2 f(u_1, v_1, w_1) = 0.$$

Pour que ces deux tangentes soient conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites données, il faut que les deux valeurs de $\frac{\lambda}{\mu}$ déterminées par l'équation qui précède

soient égales et de signe contraire (14) ; on doit donc avoir

$$u_1 f'_{u_0} + v_1 f'_{v_0} + w_1 f'_{w_0} = 0$$

ou

$$u_0 f'_{u_1} + v_0 f'_{v_1} + w_0 f'_{w_1} = 0.$$

Cette relation développée s'écrit

$$au_0u_1 + a'v_0v_1 + a''w_0w_1 + b(v_0w_1 + w_0v_1) + b'(w_0u_1 + u_0w_1) + b''(u_0v_1 + v_0u_1) = 0.$$

104. Pôle d'une droite. — THÉORÈME. — *Les droites conjuguées d'une même droite* Δ *passent par un point fixe qu'on appelle le pôle de la droite* .

Soient u_0, v_0, w_0 les coordonnées de la droite Δ, et u, v, w celles d'une droite conjuguée. On a la condition

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} = 0, \tag{2}$$

ce qui montre que la droite (u, v, w) passe par un point fixe qui a pour coordonnées f'_{u_0}, f'_{v_0}, f'_{w_0}. Ce point est le pôle de la droite Δ et l'équation (2) est l'équation de ce pôle.

D'après ce qu'on a montré plus haut (88), ce point est l'intersection des tangentes menées à la conique aux points où la droite Δ coupe cette conique.

105. Pour que ce point existe, il faut que les trois dérivées ne soient pas nulles en même temps.

Si l'on a

$$\frac{1}{2}f'_{u_0} = au_0 + b''v_0 + b'w_0 = 0,$$

$$\frac{1}{2}f'_{v_0} = b''u_0 + a'v_0 + bw_0 = 0,$$

$$\frac{1}{2}f'_{w_0} = b'u_0 + bv_0 + a''w_0 = 0,$$

le déterminant du système de ces trois équations est nul et l'équation (1) représente alors un système de deux points ; les valeurs de u_0, v_0, w_0 qui annulent les trois dérivées sont précisément les coordonnées de la droite qui joint ces deux points.

On voit donc que si l'équation (1) représente une véritable conique, une droite quelconque du plan admet un pôle bien déterminé.

Il en est de même dans le cas où l'équation représente un système de deux points, sauf le cas où la droite se confond avec la droite joignant les deux points.

Ce résultat est d'ailleurs conforme à la définition du pôle d'une droite par rapport à un système de deux points (28).

106. Proposons-nous maintenant de chercher si deux droites distinctes peuvent avoir le même pôle par rapport à une même conique.

u_0, v_0, w_0 et u_1, v_1, w_1 désignant les coordonnées de ces droites, on doit avoir, pour qu'elles aient le même pôle,

$$\frac{f'_{u_0}}{f'_{u_1}} = \frac{f'_{v_0}}{f'_{v_1}} = \frac{f'_{w_0}}{f'_{w_1}} = -\lambda$$

ou

$$f'_{u_0} + \lambda f'_{u_1} = 0,$$
$$f'_{v_0} + \lambda f'_{v_1} = 0,$$
$$f'_{w_0} + \lambda f'_{w_1} = 0.$$

Or les premiers membres de ces équations peuvent s'obtenir en remplaçant dans les fonctions f'_u, f'_v, f'_w les variables u, v, w respectivement par $u_0 + \lambda u_1$, $v_0 + \lambda v_1$, $w_0 + \lambda w_1$.

On doit donc avoir pour une valeur déterminée de λ,

$$f'_u(u_0 + \lambda u_1, \quad v_0 + \lambda v_1, \quad w_0 + \lambda w_1) = 0,$$
$$f'_v(u_0 + \lambda u_1, \quad v_0 + \lambda v_1, \quad w_0 + \lambda w_1) = 0,$$
$$f'_w(u_0 + \lambda u_1, \quad v_0 + \lambda v_1, \quad w_0 + \lambda w_1) = 0;$$

cela nous montre que l'équation doit représenter un système de deux points et que la droite qui joint ces deux points a pour coordonnées $u_0 + \lambda u_1$, $v_0 + \lambda v_1$, $w_0 + \lambda w_1$; cette droite doit donc passer par le point de rencontre des deux droites données.

Donc pour que deux droites aient le même pôle par rapport

à une conique, il faut que cette conique se réduise à deux points et que les deux droites se coupent sur la droite joignant les deux points.

107. Polaire d'un point. — On appelle polaire d'un point la droite qui a ce point pour pôle.

Soit le point (x_0, y_0, z_0) ; si u_0, v_0, w_0 désignent les coordonnées de la polaire de ce point, on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} f'_{u_0} &= au_0 + b''v_0 + b'w_0 = \lambda x_0, \\ \frac{1}{2} f'_{v_0} &= b''u_0 + a'v_0 + bw_0 = \lambda y_0, \\ \frac{1}{2} f'_{w_0} &= b'u_0 + bv_0 + a''w_0 = \lambda z_0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Tout revient à résoudre ce système par rapport à u_0, v_0, w_0.

Premier cas. — Supposons qu'on ait

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

c'est-à-dire que l'équation (1) représente une véritable conique.

On peut alors résoudre le système (3) d'après la règle de Cramer ; on aura

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= \lambda(Ax_0 + B''y_0 + B'z_0), \\ \Delta v_0 &= \lambda(B''x_0 + A'y_0 + Bz_0), \\ \Delta w_0 &= \lambda(B'x_0 + By_0 + A''z_0), \end{aligned}$$

qu'on peut écrire, en désignant par

$$\varphi(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

l'équation ponctuelle de la conique,

$$\begin{aligned} u_0 &= \mu\varphi'_{x_0}, \\ v_0 &= \mu\varphi'_{y_0}, \\ w_0 &= \mu\varphi'_{z_0} ; \end{aligned}$$

l'équation de la polaire sera donc

$$x\varphi'_{x_0} + y\varphi'_{y_0} + z\varphi'_{z_0} = 0,$$

résultat qu'on établit en géométrie analytique.

Rappelons que deux points sont conjugués quand la droite qui les joint rencontre la conique en deux points conjugués harmoniques par rapport à ces deux points ; chacun d'eux est alors situé sur la polaire de l'autre, et la relation qui lie les coordonnées x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 de ces deux points est

$$x_1\varphi'_{x_0} + y_1\varphi'_{y_0} + z_1\varphi'_{z_0} = 0$$

ou

$$Ax_0x_1 + A'y_0y_1 + A''z_0z_1 + B(y_0z_1 + z_0y_1) + B'(z_0x_1 + x_0z_1) + B''(x_0y_1 + y_0x_1) = 0.$$

Deuxième cas. — Supposons $\Delta = 0$, et l'un au moins de ses mineurs différent de zéro, soit par exemple (1)

$$A'' = aa' - b''^2 \neq 0.$$

L'équation représente deux points distincts.

On peut alors résoudre les deux premières équations du système (3) par rapport à u_0 et v_0, et, en transportant ces valeurs dans la troisième équation, on obtient

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b'w_0 - \lambda x_0 \\ b'' & a' & bw_0 - \lambda y_0 \\ b' & b & a''w_0 - \lambda z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

ou

$$w_0 \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} a & b'' & x_0 \\ b'' & a' & y_0 \\ b' & b & z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

et comme $\Delta = 0$, il reste

$$\lambda \begin{vmatrix} a & b'' & x_0 \\ b'' & a' & y_0 \\ b' & b & z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Le coefficient de λ peut s'écrire

$$B'x_0 + By_0 + A''z_0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\varphi'_{z_0};$$

égalé à zéro, il exprime la condition pour que le point (x_0, y_0, z_0)

---

(1) On peut toujours supposer que le mineur différent de zéro soit l'un des mineurs appelés principaux, A, A′ ou A″, car si ces trois mineurs étaient nuls ainsi que Δ, les trois autres mineurs seraient aussi nuls d'après les formules du n° 93.

soit sur la droite D joignant les deux points représentés par l'équation (1).

Nous aurons donc deux cas à distinguer :

1° *Le point* (x_0, y_0, z_0) *n'est pas sur la droite* D.

Le système (3) est équivalent au système

$$\frac{1}{2} f'_{u_0} - \lambda x_0 = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_{v_0} - \lambda y_0 = 0,$$

$$\lambda \begin{vmatrix} a & b'' & x_0 \\ b'' & a' & y_0 \\ b' & b & z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le coefficient de λ étant différent de zéro, pour que la troisième équation soit satisfaite, il faut qu'on ait

$$\lambda = 0;$$

les deux premières équations se réduisent alors à

$$f'_{u_0} = 0, \qquad f'_{v_0} = 0;$$

elles déterminent la droite D.

En conséquence, tous les points en dehors de la droite D ont pour polaire cette droite.

2° *Le point* (x_0, y_0, z_0) *est sur la droite* D.

Le coefficient de λ est nul et le système (3) se réduit aux deux équations

$$\frac{1}{2} f'_{u_0} - \lambda x_0 = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_{v_0} - \lambda y_0 = 0;$$

les coordonnées de la polaire satisfont à l'équation

$$\frac{f'_{u_0}}{x_0} - \frac{f'_{v_0}}{y_0} = 0.$$

Si l'on y considère u_0, v_0, w_0 comme coordonnées courantes, cette équation représente un point situé sur la droite D, et toute droite passant par ce point est polaire du point (x_0, y_0, z_0). Ce point et le point donné divisent harmoniquement les deux points représentés par l'équation (1).

Troisième cas. Supposons $\Delta = 0$, et tous ses mineurs nuls.

Dans ce cas $f(u, v, w)$ est carré parfait, et l'équation (1) représente un point double.

L'un des coefficients a, a' ou a'' est différent de zéro; supposons $a \neq 0$.

On peut tirer u_0 de la première équation du système (3), et en remplaçant dans les deux autres, observant que tous les mineurs de Δ sont nuls, on obtient le système suivant, équivalent au système (3) :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} f'_{u_0} - \lambda x_0 &= 0, \\ \lambda(b''x_0 - ay_0) &= 0, \\ \lambda(b'x_0 - az_0) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Les conditions

$$b''x_0 - ay_0 = 0,$$
$$b'x_0 - az_0 = 0$$

peuvent s'écrire

$$\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b''} = \frac{z_0}{b'};$$

elles expriment que le point donné coïncide avec le point double, car $f(u, v, w)$ étant carré parfait, sa racine est proportionnelle à une dérivée partielle, f'_u, puisque $a \neq 0$.

1° *Supposons que le point* (x_0, y_0, z_0) *ne coïncide pas avec le point double.*

Pour que les deux dernières équations du système (5) soient satisfaites, il faut que λ soit nul.

La première équation devient alors

$$f'_{u_0} = 0;$$

elle exprime que la polaire passe par le point double.

2° *Supposons que le point* (x_0, y_0, z_0) *coïncide avec le point double.*

Les deux dernières équations du système (5) sont satisfaites quel que soit λ ; la polaire est donc déterminée par l'équation

$$\frac{1}{2} f'_{u_0} - \lambda x_0 = 0,$$

et comme λ est arbitraire, une droite quelconque peut satisfaire à cette équation ; la polaire du point double est donc entièrement indéterminée.

108. Tous ces résultats peuvent être résumés de la manière suivante :

1° Si l'équation (1) représente une véritable conique, une droite quelconque a un pôle bien déterminé et un point quelconque a une polaire également bien déterminée.

2° Si l'équation (1) représente deux points distincts A et B,

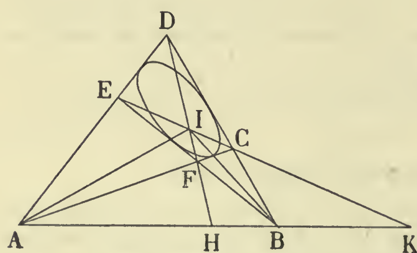
toute droite autre que la droite AB a un pôle situé sur la droite AB; le pôle de la droite AB est un point quelconque du plan. Tout point en dehors de la droite AB a pour polaire la droite AB, et tout point situé sur la droite AB a une infinité de polaires assujetties simplement à passer par le conjugué harmonique du point donné par rapport à A et B.

3° Si l'équation (1) représente un point double, toute droite ne passant pas par le point double a pour pôle ce point double, et toute droite passant par le point double a pour pôle un point quelconque du plan.

Tout point autre que le point double a pour polaire une droite quelconque passant par le point double, et le point double a pour polaire une droite quelconque du plan.

109. Théorème. — *Si par deux points d'une droite, on mène des tangentes à une conique, le point de concours des diagonales du quadrilatère formé par ces tangentes est le pôle de la droite.*

Menons les tangentes par les points A et B; on obtient le quadrilatère CDEF dont le point de concours des diagonales est le point I; je dis que I est le pôle de AB.



D'après les propriétés harmoniques du quadrilatère complet ABCDEF, DF est divisée harmoniquement par les points I et H, le faisceau A.HFID est harmonique; on en conclut que AI et AH sont conjuguées par rapport à la conique et que AI passe par le pôle de AB. Pour une raison analogue, BI passe par le pôle de AB; ce pôle est donc le point I, le théorème est démontré.

Si on applique le théorème aux points C et E, on voit que CE a pour pôle le point H; de même DF a pour pôle le point K.

110. Triangles conjugués. — On dit qu'un triangle est con-

jugué par rapport à une conique lorsque chacun de ses côtés a pour pôle le sommet opposé.

Il existe une infinité de triangles conjugués par rapport à une conique.

En effet, par un point arbitraire A menons deux droites conjuguées quelconques, traçons la polaire du point A qui rencontre ces droites en B et C ; le triangle ABC est conjugué par rapport à la conique.

Dans cette construction, le point A est arbitraire, ainsi que l'une des droites AB ou AC ; les éléments d'un triangle conjugué dépendent donc de *trois* paramètres arbitraires.

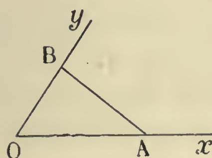
Le théorème précédent (109) peut s'énoncer de la manière suivante :

Les diagonales d'un quadrilatère complet circonscrit à une conique forment un triangle conjugué par rapport à cette conique.

Remarquons que si un triangle est conjugué par rapport à une conique, deux sommets quelconques et deux côtés quelconques sont conjugués par rapport à la conique.

111. Coniques conjuguées par rapport à un triangle. — On dit qu'une conique est conjuguée par rapport à un triangle lorsque le triangle est conjugué par rapport à la conique.

Nous allons chercher l'équation tangentielle des coniques conjuguées par rapport à un triangle.



Nous supposerons d'abord que l'on prenne pour axes de coordonnées deux côtés OA et OB du triangle.

Désignons par α l'abscisse du point A et par β l'ordonnée du point B.

Soit

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0$$

l'équation générale des coniques.

Écrivons que le pôle de Ox est le point B. L'équation du pôle de Ox est

$$\frac{1}{2} f'_v = b''u + a'v + bw = 0;$$

on doit avoir

$$b'' = 0, \qquad \frac{a'}{b} = \beta.$$

En écrivant que Oy a pour pôle le point A, on obtient de même

$$b'' = 0, \qquad \frac{a}{b'} = \alpha.$$

Ces conditions sont suffisantes, car si elles sont remplies AB aura pour pôle le point O.

L'équation de la conique s'écrit alors, en remplaçant a et a' par leurs valeurs tirées des relations précédentes,

$$b'\alpha u^2 + b\beta v^2 + a'w^2 + 2bvw + 2b'uw = 0$$

ou encore

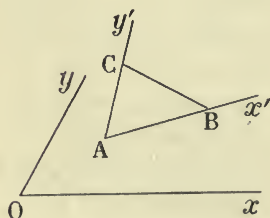
$$\frac{b'}{\alpha}(u\alpha + w)^2 + \frac{b}{\beta}(v\beta + w)^2 + w^2\left(a'' - \frac{b'}{\alpha} - \frac{b}{\beta}\right) = 0.$$

On peut dire que l'équation générale de ces coniques est

$$A(u\alpha + w)^2 + B(v\beta + w)^2 + Cw^2 = 0,$$

A, B et C désignant des nombres arbitraires.

Supposons maintenant que le triangle soit rapporté à des axes quelconques xOy; soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées des sommets A, B et C de ce triangle.



Si nous prenons pour nouveaux axes de coordonnées AB et AC, l'équation générale des coniques conjuguées par rapport au triangle, s'écrit

$$A(u'\alpha + w')^2 + B(v'\beta + w')^2 + Cw'^2 = 0,$$

α et β désignant les longueurs AB et AC.

Pour revenir aux premiers axes, nous utiliserons les formules de transformation établies au numéro 34.

Remarquons que les coordonnées du point directeur de AB

sont $\frac{x_2 - x_1}{\alpha}$ et $\frac{y_2 - y_1}{\alpha}$; pour la direction AC, ces quantités sont $\frac{x_3 - x_1}{\beta}$, $\frac{y_3 - y_1}{\beta}$.

On aura donc les formules

$$u' = \frac{u(x_2 - x_1)}{\alpha} + \frac{v(y_2 - y_1)}{\alpha},$$

$$v' = \frac{u(x_3 - x_1)}{\beta} + \frac{v(y_3 - y_1)}{\beta},$$

$$w' = ux_1 + vy_1 + w.$$

Réduisons les deux premières équations au même dénominateur et ajoutons à chacune d'elles la troisième équation membre à membre ; on a

$$u'\alpha + w' = ux_2 + vy_2 + w,$$

$$v'\beta + w' = ux_3 + vy_3 + w,$$

$$w' = ux_1 + vy_1 + w.$$

L'équation de la conique devient donc

$$A(ux_2 + vy_2 + w)^2 + B(ux_3 + vy_3 + w)^2 + C(ux_1 + vy_1 + w)^2 = 0;$$

elle est de la forme

$$\lambda_1(ux_1 + vy_1 + w)^2 + \lambda_2(ux_2 + vy_2 + w)^2 + \lambda_3(ux_3 + vy_3 + w)^2 = 0,$$

ou, en désignant par P_1, P_2, P_3 les premiers membres des équations des sommets du triangle donné, on voit que l'équation générale tangentielle des coniques conjuguées par rapport à ce triangle est

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 = 0.$$

112. Théorème. — *Si deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, leurs six sommets sont sur une conique et leurs côtés sont tangents à une conique.*

Soient x_i, y_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ les coordonnées des six sommets des triangles.

L'équation tangentielle d'une conique conjuguée par rapport au

triangle qui a pour sommets les trois premiers points est

$$\sum_{i=1}^{i=3} \lambda_i (ux_i + vy_i + w)^2 = 0;$$

l'équation tangentielle d'une conique conjuguée par rapport au triangle formé par les trois autres points est

$$\sum_{i=4}^{i=6} \lambda_i (ux_i + vy_i + w)^2 = 0.$$

Écrivons que les deux équations représentent la même conique ; on obtient une identité de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=6} \mu_i (ux_i + vy_i + w)^2 \equiv 0.$$

On en déduit

$$\sum \mu_i x_i^2 = 0, \qquad \sum \mu_i y_i^2 = 0, \qquad \sum \mu_i x_i y_i = 0,$$

$$\sum \mu_i x_i = 0, \qquad \sum \mu_i y_i = 0, \qquad \sum \mu_i = 0.$$

On a six équations homogènes à six inconnues, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_6$; le déterminant du système doit être nul ; on a donc

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 \\ x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 & x_5y_5 & x_6y_6 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 & y_6^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui prouve bien que les six points sont sur une conique.

En transformant cette propriété par polaires réciproques, on a la seconde partie du théorème.

113. Théorème réciproque. — *Si deux triangles sont inscrits dans une conique, il existe une conique conjuguée par rapport à ces deux triangles.*

Si le déterminant précédent est nul, il existera une relation linéaire et homogène entre les éléments de ses lignes ; on aura donc la suite d'égalités

$$\sum \mu_i x_i^2 = 0, \qquad \sum \mu_i x_i y_i = 0, \qquad \sum \mu_i y_i^2,$$

$$\sum \mu_i x_i = 0, \qquad \sum \mu_i y_i = 0, \qquad \sum \mu_i = 0,$$

d'où l'on déduit l'identité

$$\sum_{i=1}^{i=6} \mu_i (ux_i + vy_i + w)^2 \equiv 0,$$

ce qui montre que les équations tangentielles

$$\sum_{i=1}^{i=3} \mu_i (ux_i + vy_i + w)^2 = 0,$$

$$\sum_{i=4}^{i=6} \mu_i (ux_i + vy_i + w)^2 = 0$$

représentent la même conique, qui est conjuguée par rapport aux deux triangles.

Corrélativement, si deux triangles sont circonscrits à une même conique, il existe une conique conjuguée par rapport aux deux triangles.

EXERCICES ET NOTES

1. Triangles polaires réciproques. — On dit que deux triangles sont polaires réciproques par rapport à une conique lorsque les sommets de l'un sont les pôles des côtés de l'autre. La réciproque est vraie.

Théorème. — *Les droites qui joignent les sommets correspondants de deux triangles polaires réciproques passent par un même point.*

Soit $f(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle de la conique ; et soient

$$\alpha = ax + a'y + a''z = 0,$$

$$\beta = bx + b'y + b''z = 0,$$

$$\gamma = cx + c'y + c''z = 0$$

les équations des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC ; nous allons démontrer que si l'on mène par les sommets les droites conju-

guées des côtés opposés, les trois droites obtenues sont concourantes.

Une droite quelconque passant par le point A a pour équation $\beta + \lambda\gamma = 0$; pour qu'elle soit conjuguée du côté BC, on doit avoir

$$(b + \lambda c)f'_a + (b' + \lambda c')f'_{a'} + (b'' + \lambda c'')f'_{a''} = 0,$$

d'où l'on tire, en posant pour simplifier l'écriture,

$$bf'_a + b'f'_{a'} + b''f'_{a''} = af'_b + a'f'_{b'} + a''f'_{b''} = (ab),$$

$$\lambda = -\frac{(ab)}{(ac)}.$$

Nous obtenons donc la droite

$$\beta(ac) - \gamma(ab) = 0.$$

Les deux autres droites auront pour équations

$$\gamma(ba) - \alpha(bc) = 0,$$

$$\alpha(cb) - \beta(ca) = 0.$$

En additionnant on a une identité ; donc les trois droites sont concourantes.

En transformant par le principe de dualité, on obtient le théorème suivant :

Les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles polaires réciproques sont en ligne droite.

D'ailleurs, l'un de ces deux théorèmes résulte de l'autre, d'après les propriétés de deux triangles homologiques ; on peut donc dire que deux triangles polaires réciproques sont homologiques.

2. *Démontrer que, réciproquement, deux triangles homologiques sont polaires réciproques par rapport à une conique.*

3. *Etant donnés deux triangles* ABC, $A_1B_1C_1$, *par les points* A, B, C *on mène les droites respectivement conjuguées de* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. *Si ces droites passent par un même point, les droites passant par* A_1, B_1, C_1 *et respectivement conjuguées de* BC, CA, AB, *se coupent aussi en un même point.*

Prenant les mêmes notations que dans l'exercice 1, les trois premières droites auront pour équations

$$\beta(ca_1) = \gamma(ba_1),$$

$$\gamma(ab_1) = \alpha(cb_1),$$

$$\alpha(bc_1) = \beta(ac_1),$$

et pour que ces droites soient concourantes, il faut qu'on ait

$$(ca_1)(ab_1)(bc_1) = (ba_1)(cb_1)(ac_1) ;$$

cette relation étant symétrique par rapport aux deux triangles, le théorème est démontré. (¹)

Si la conique se compose des deux points cycliques, deux droites conjuguées quelconques sont perpendiculaires ; on a alors l'énoncé suivant :

Si deux triangles sont tels que les perpendiculaires abaissées des sommets de l'un sur les côtés de l'autre soient concourantes, inversement les perpendiculaires abaissées des sommets du deuxième sur les côtés du premier sont aussi concourantes.

4. *Les polaires des milieux des côtés d'un triangle par rapport à toute conique inscrite déterminent un triangle dont l'aire est égale à celle du triangle donné.*

5. *Par un point quelconque du plan, on peut mener une infinité de couples de droites conjuguées, qui constituent deux faisceaux en involution. Trouver les points du plan pour lesquels deux droites conjuguées quelconques sont perpendiculaires. Ces points sont les foyers.*

6. *Si par deux points* B *et* C *conjugués par rapport à une conique, on mène deux droites qui se coupent en un point a de la courbe, la corde bc que ces deux droites interceptent sur la conique passe par le pôle* A *de* BC. *Théorème corrélatif.*

7. *L'équation générale des coniques ayant pour centre le point* (x, y), *et pour diamètres conjugués deux droites de coefficients angulaires m et m', est*

$$(ux + vy + w)^2 + \lambda(u + vm)^2 + \mu(u + vm')^2 = 0.$$

Ces deux diamètres forment en effet avec la droite de l'infini un triangle conjugué par rapport à la conique

---

(1) Cette démonstration et celle qui précède sont dues à M. Darboux.

CHAPITRE VII

CENTRE, DIAMÈTRES ET AXES

114. Centre. — On appelle centre d'une conique un point tel que toute droite passant par ce point rencontre la courbe en deux points symétriques par rapport à ce point.

Il résulte immédiatement de cette définition que le centre est le pôle de la droite de l'infini, et que, réciproquement, si le pôle de la droite de l'infini est à distance finie, ce point est un centre.

Soit

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0 \quad (1)$$

l'équation tangentielle de la conique.

L'équation du pôle d'une droite quelconque (u_0, v_0, w_0) est

$$uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} = 0,$$

ou encore

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0.$$

Si la droite est à l'infini, u_0 et v_0 sont nuls, et l'équation devient

$$\frac{1}{2} f'_w = b'u + bv + a''w = 0.$$

Premier cas. $a'' \neq 0$. La conique est une ellipse ou une hyperbole.

Le pôle est à distance finie. La courbe a donc un centre, qui

a pour coordonnées $\frac{b'}{a''}$ et $\frac{b}{a''}$, ou, si l'on veut, pour coordonnées homogènes b', b et a''.

Dans le cas particulier où Δ est nul, l'équation (1) représente deux points, le centre est le milieu de ces deux points.

Deuxième cas. $a'' = 0$. La conique est une parabole.

Le pôle de la droite de l'infini est à l'infini, ce qu'on pouvait prévoir, puisque la courbe est tangente à cette droite. La parabole n'a donc pas de centre.

Le point où la courbe touche la droite de l'infini a pour coordonnées homogènes b', b et 0 ; la direction asymptotique a donc pour paramètres directeurs b' et b.

115. Il résulte de là que l'équation générale des coniques qui ont pour centre le point (x, y) est

$$au^2 + a'v^2 + 2b''uv + 2xuw + 2yvw + w^2 = 0. \qquad (2)$$

116. Théorème de Newton. — *Le lieu des centres des coniques tangentes à quatre droites est une droite qui passe par les milieux des diagonales du quadrilatère formé par les quatre droites.*

Soient u_i, v_i, w_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les coordonnées des quatre droites.

L'équation d'une conique ayant pour centre le point (x, y) est l'équation (2) ; la conique étant tangente aux quatre droites données, on aura les relations

$$au_1^2 + a'v_1^2 + 2b''u_1v_1 + 2xu_1w_1 + 2yv_1w_1 + w_1^2 = 0,$$
$$au_2^2 + a'v_2^2 + 2b''u_2v_2 + 2xu_2w_2 + 2yv_2w_2 + w_2^2 = 0,$$
$$au_3^2 + a'v_3^2 + 2b''u_3v_3 + 2xu_3w_3 + 2yv_3w_3 + w_3^2 = 0,$$
$$au_4^2 + a'v_4^2 + 2b''u_4v_4 + 2xu_4w_4 + 2yv_4w_4 + w_4^2 = 0.$$

En éliminant a, a', b'' entre ces quatre équations, on aura l'équation du lieu.

On obtient ainsi

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & u_1v_1 & 2xu_1w_1 + 2yv_1w_1 + w_1^2 \\ u_2^2 & v_2^2 & u_2v_2 & 2xu_2w_2 + 2yv_2w_2 + w_2^2 \\ u_3^2 & v_3^2 & u_3v_3 & 2xu_3w_3 + 2yv_3w_3 + w_3^2 \\ u_4^2 & v_4^2 & u_4v_4 & 2xu_4w_4 + 2yv_4w_4 + w_4^2 \end{vmatrix} = 0,$$

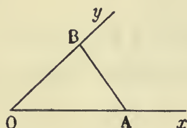
équation qui représente une droite.

Deux sommets opposés du quadrilatère peuvent être considérés comme formant une conique tangente aux quatre droites ; il en résulte que le milieu de ces deux points fera partie du lieu.

On voit ainsi que le lieu est la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère formé par les quatre droites.

117. Exercice. — *Lieu des centres des hyperboles équilatères conjuguées par rapport à un triangle.*

Prenons deux côtés du triangle pour axes de coordonnées ; soient α l'abscisse du point A et β l'ordonnée du point B.



L'équation générale des coniques conjuguées par rapport au triangle OAB est (111)

$$A(u\alpha + w)^2 + B(v\beta + w)^2 + Cw^2 = 0$$

ou, en développant,

$$A\alpha^2u^2 + B\beta^2v^2 + (A + B + C)w^2 + 2A\alpha uw + 2B\beta vw = 0. \quad (3)$$

Divisons par $A + B + C$ et posons

$$\frac{A\alpha}{A + B + C} = x, \qquad \frac{B\beta}{A + B + C} = y,$$

x et y désignant les coordonnées du centre.

Nous obtenons alors

$$\alpha xu^2 + \beta yv^2 + 2xuw + 2yvw + w^2 = 0,$$

qui est l'équation de la conique conjuguée par rapport au triangle AOB et ayant pour centre le point (x, y).

Écrivons que cette conique est une hyperbole équilatère ; nous aurons l'équation du lieu.

On doit avoir

$$A + A' - 2B'' \cos\theta = 0$$

ou

$$a'a'' - b^2 + a''a - b'^2 - 2(bb' - a''b'') \cos\theta = 0.$$

Il vient dans le cas particulier considéré

$$\beta y - y^2 + \alpha x - x^2 - 2xy \cos\theta = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta - \alpha x - \beta y = 0,$$

équation du cercle circonscrit au triangle OAB.

118. Pour que l'équation générale (3) représente une parabole, il faut que

$$A + B + C = 0.$$

L'équation générale des paraboles conjuguées par rapport au triangle OAB sera donc

$$\lambda u(u\alpha + 2w) + \mu v(v\beta + 2w) = 0.$$

119. Diamètres. — Le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction fixe dans une conique est une droite qu'on appelle diamètre conjugué de la direction donnée.

Ce lieu peut être en effet considéré comme la polaire du point à l'infini dans la direction des cordes.

Soient α, β les paramètres directeurs de cette direction ; le point à l'infini dans cette direction a pour coordonnées homogènes α, β, 0. Si u, v, w sont les coordonnées de sa polaire, f'_u, f'_v et f'_w sont respectivement proportionnels à α, β et 0.

On a donc

$$\left.\begin{aligned} \frac{f'_u}{\alpha} &= \frac{f'_v}{\beta}, \\ f'_w &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ces deux équations déterminent le diamètre conjugué de la direction α, β.

120. Les diamètres étant les polaires des points situés sur la droite de l'infini, doivent passer par le pôle de cette droite ; c'est ce que montre d'ailleurs la condition $f'_w = 0$.

Il en résulte que dans l'ellipse et l'hyperbole les diamètres passent par le centre, tandis que dans la parabole, ils sont parallèles à la direction asymptotique.

121. Les relations (4) déterminent un diamètre tel que nous l'avons défini, seulement dans le cas où le point de coordonnées α, β, 0 n'est pas situé sur la conique.

Dans le cas contraire, si ce point est situé sur la conique, les équations (4) déterminent les coordonnées de la tangente en ce point, c'est-à-dire d'une asymptote si la conique est une hyperbole, de la droite de l'infini si la conique est une parabole.

122. Diamètres conjugués. — On dit que deux diamètres sont conjugués dans une conique à centre lorsque chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

Chacun de ces diamètres passe par le pôle de l'autre ; on peut donc les considérer comme deux droites conjuguées passant par le centre.

La relation qui lie les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués s'obtient en écrivant que les deux droites

$$y - \frac{b}{a''} = m\left(x - \frac{b'}{a''}\right),$$

$$y - \frac{b}{a''} = m'\left(x - \frac{b'}{a''}\right)$$

sont conjuguées par rapport à la conique.

On trouve ainsi la relation connue

$$A'mm' + B''(m + m') + A = 0,$$

qu'on pouvait déduire de l'équation ponctuelle de la conique.

123. Prenons comme axes de coordonnées deux diamètres conjugués quelconques, et cherchons l'équation tangentielle de la conique par rapport à ces axes. Les deux axes et la droite de l'infini sont les côtés d'un triangle conjugué par rapport à la conique. Les équations des sommets du triangle étant

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0,$$

l'équation de la conique sera de la forme (**111**)

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = 0.$$

124. **Axes.** — On appelle axe dans une conique un diamètre perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales.

Il résulte de cette définition qu'on peut considérer un axe comme une droite dont le pôle est à l'infini dans la direction perpendiculaire à cette droite.

Soit $$ux + vy + w = 0$$

l'équation d'un axe ; la direction perpendiculaire a pour paramètres directeurs $u - v\cos\theta$ et $v - u\cos\theta$; le pôle de cette droite a pour coordonnées f'_u, f'_v, f'_w ; pour que ce point soit à l'infini dans la direction qui a pour paramètres

$u - v\cos\theta$, et $v - u\cos\theta$ il faut qu'on ait

$$\left.\begin{aligned} \frac{f'_u}{u - v\cos\theta} &= \frac{f'_v}{v - u\cos\theta}, \\ f'_w &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ces équations déterminent les coordonnées des axes ; la première est du second degré, la seconde du premier ; il existe donc deux axes en général.

125. Pour discuter les solutions de ces équations, on peut introduire une nouvelle inconnue S et écrire

$$\frac{f'_u}{u - v\cos\theta} = \frac{f'_v}{v - u\cos\theta} = 2S$$

ou

$$f'_u = 2S(u - v\cos\theta),$$
$$f'_v = 2S(v - u\cos\theta),$$

ce qui donne, en développant et en écrivant de nouveau la seconde des équations (5),

$$\left.\begin{aligned} (a - S)u + (b'' + S\cos\theta)v + b'w &= 0, \\ (b'' + S\cos\theta)u + (a' - S)v + bw &= 0, \\ b'u + bv + a''w &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Les équations (6) sont homogènes en u, v, w ; pour qu'elles admettent des solutions non toutes nulles, il faut que le déterminant du système soit nul. On doit donc avoir

$$F(S) = \begin{vmatrix} a - S & b'' + S\cos\theta & b' \\ b'' + S\cos\theta & a' - S & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} = 0.$$

Pour développer cette équation, on peut décomposer le déterminant en une somme de quatre déterminants :

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -S & b'' & b' \\ S\cos\theta & a' & b \\ 0 & b & a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & S\cos\theta & b' \\ b'' & -S & b \\ b' & 0 & a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -S & S\cos\theta & b' \\ S\cos\theta & -S & b \\ 0 & 0 & a'' \end{vmatrix}$$

de telle sorte que l'équation peut s'écrire

$$F(S) = a''S^2 \sin^2\theta - S(A + A' - 2B''\cos\theta) + \Delta = 0.$$

Si dans les équations (6) on remplace S par une racine de cette équation, ces équations admettront un système de solutions en u, v, w qui seront les coordonnées d'un axe.

126. Pour que les racines de l'équation en S soient réelles, il faut qu'on ait

$$(A + A' - 2B''\cos\theta)^2 - 4a''\Delta\sin^2\theta > 0,$$

et comme

$$a''\Delta = AA' - B''^2,$$

la condition devient

$$(A + A' - 2B''\cos\theta)^2 - 4(AA' - B''^2)\sin^2\theta > 0.$$

Ordonnons par rapport à B″ ; on a

$$4B''^2 - 4B''(A + A')\cos\theta + (A + A')^2 - 4AA'\sin^2\theta > 0$$

ou

$$[2B'' - (A + A')\cos\theta]^2 + (A - A')^2\sin^2\theta > 0.$$

Cette condition est toujours remplie ; l'équation en S a donc toujours ses racines réelles.

Pour que ses racines soient égales, on doit avoir

$$A - A' = 0,$$

$$2B'' - (A + A')\cos\theta = 0,$$

ce qui donne

$$A = A' = \frac{B''}{\cos\theta}.$$

On reconnaît les conditions pour que la conique soit un cercle.

127. C'est également dans ce seul cas que les équations (6) peuvent avoir leurs coefficients proportionnels et par suite admettre une infinité de solutions en u, v, w.

En effet, pour que l'on ait

$$\frac{a - S}{b'} = \frac{b'' + S\cos\theta}{b} = \frac{b'}{a''},$$

$$\frac{b'' + S\cos\theta}{b'} = \frac{a' - S}{b} = \frac{b}{a''},$$

il faut que

$$a''S = A = A' = \frac{B''}{\cos\theta}.$$

S est alors racine double de l'équation.

On peut donc dire que *si la conique n'est pas un cercle, l'équation en* S *a ses racines réelles et distinctes, et qu'à toute racine de cette équation correspond un seul système de valeurs de u, v, w donné par les équations* (6).

128. Il est alors aisé de discuter.

PREMIER CAS. $a'' \neq 0$. *La conique est une ellipse ou une hyperbole.*

L'équation en S a deux racines S_1 et S_2; à chaque racine correspond un axe.

Je vais démontrer que ces deux axes sont perpendiculaires; soient, en effet, u_1, v_1, w_1 et u_2, v_2, w_2 les coordonnées des axes correspondant aux deux racines S_1 et S_2. On a

$$f'_{u_1} = 2S_1(u_1 - v_1\cos\theta), \qquad f'_{u_2} = 2S_2(u_2 - v_2\cos\theta),$$
$$f_{v_1} = 2S_1(v_1 - u_1\cos\theta), \qquad f'_{v_2} = 2S_2(v_2 - u_2\cos\theta),$$
$$f'_{w_1} = 0, \qquad f'_{w_2} = 0.$$

Multiplions les trois équations de gauche respectivement par u_2, v_2, w_2, puis ajoutons; multiplions de même les trois équations de droite respectivement par u_1, v_1, w_1, puis ajoutons; on a

$$u_2 f'_{u_1} + v_2 f'_{v_1} + w_2 f'_{w_1} = 2S_1[u_1u_2 + v_1v_2 - (u_1v_2 + v_1u_2)\cos\theta],$$
$$u_1 f'_{u_2} + v_1 f'_{v_2} + w_1 f'_{w_2} = 2S_2[u_1u_2 + v_1v_2 - (u_1v_2 + v_1u_2)\cos\theta].$$

Retranchons, en remarquant que les premiers membres sont égaux; il vient

$$0 = 2(S_1 - S_2)[u_1u_2 + v_1v_2 - (u_1v_2 + v_1u_2)\cos\theta],$$

et comme $S_1 - S_2$ n'est pas nul, on doit avoir

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - (u_1 v_2 + u_2 v_1)\cos\theta = 0,$$

ce qui montre que les deux axes sont perpendiculaires.

Et en même temps on a aussi, d'après les équations précédentes,

$$u_1 f'_{u_2} + v_1 f'_{v_2} + w_1 f'_{w_2} = 0\,;$$

par suite les axes sont deux droites conjuguées ; ce sont deux diamètres conjugués rectangulaires.

Deuxième cas. $a'' = 0$. *La conique est une parabole.*

L'équation en S s'abaisse au premier degré, elle admet une seule racine,

$$S = \frac{\Delta}{A + A' - 2B''\cos\theta},$$

qu'on peut encore écrire, puisque $a'' = 0$,

$$S = \frac{-\Delta}{b^2 + b'^2 + 2bb'\cos\theta}.$$

Portons cette valeur de S dans la première des équations (6), remplaçons Δ par sa valeur $-ab^2 - a'b'^2 + 2bb'b''$; on obtient,

$$\begin{aligned} u[a(b'^2 + 2bb'\cos\theta) - a'b'^2 + 2bb'b''] \\ + v[b''(b^2 + b'^2) + (ab^2 + a'b'^2)\cos\theta] \\ + b'w(b^2 + b'^2 + 2bb'\cos\theta) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation, jointe à

$$f'_w = 2(b'u + bv) = 0,$$

détermine les coordonnées de l'axe de la parabole.

De cette seconde équation, on tire

$$u = b, \qquad v = -b'$$

et en remplaçant dans la première on obtient

$$w = \frac{b''(b'^2 - b^2) - bb'(a - a') + (a'b'^2 - ab^2)\cos\theta}{b^2 + b'^2 + 2bb'\cos\theta}.$$

L'équation de l'axe peut donc s'écrire

$$bx - b'y + \frac{b''(b'^2 - b^2) - bb'(a - a') + (a'b'^2 - ab^2)\cos\theta}{b^2 + b'^2 + 2bb'\cos\theta} = 0.$$

129. On peut obtenir cette équation plus rapidement en considérant l'axe comme le diamètre conjugué de la direction perpendiculaire à la direction asymptotique.

Cette direction asymptotique ayant pour paramètres directeurs b' et b, la direction perpendiculaire aura pour paramètres $b + b'\cos\theta$ et $-(b' + b\cos\theta)$. Les coordonnées de son diamètre conjugué seront déterminées par

$$\frac{f'_u}{b + b'\cos\theta} = \frac{f'_v}{-(b' + b\cos\theta)},$$

$$f'_w = 0.$$

Ces équations se déduisent aussitôt des équations (5) en remplaçant dans les dénominateurs u et v respectivement par les valeurs b et $-b'$ que l'on déduit de la seconde équation $f'_w = 0$.

En résolvant ce système, on obtient pour w la valeur écrite plus haut.

130. Dans le cas où les axes de coordonnées sont rectangulaires, les formules (5) se simplifient et deviennent

$$\frac{f'_u}{u} = \frac{f'_v}{v},$$

$$f'_w = 0.$$

L'équation en S s'écrit

$$a''S^2 - S(A + A') + \Delta = 0.$$

Dans le cas de la parabole, les coordonnées de l'axe vérifient les équations

$$\frac{f'_u}{b} = \frac{f'_v}{-b'}, \qquad f'_w = 0,$$

et l'équation de cet axe est

$$bx - b'y + \frac{b''(b'^2 - b^2) - bb'(a - a')}{b^2 + b'^2} = 0.$$

131. Exercice. — *Trouver l'enveloppe des axes des coniques qui touchent deux droites fixes en des points donnés.*

Prenons pour axes de coordonnées les deux droites données ; soit α l'abscisse du point A et β l'ordonnée du point B.

Nous allons chercher l'équation tangentielle générale des coniques tangentes en A et B aux droites Ox et Oy.

Il faut d'abord écrire que le pôle de Ox est le point A.

L'équation du pôle de Ox est

$$\frac{1}{2} f'_v = b''u + a'v + bw = 0.$$

On doit donc avoir

$$a' = 0, \qquad \frac{b''}{b} = \alpha.$$

De même pour que la conique soit tangente à Oy au point B, il faut qu'on ait

$$a = 0, \qquad \frac{b''}{b'} = \beta.$$

Tirons b et b' de ces relations et remplaçons dans l'équation de la conique ; il vient

$$a''w^2 + \frac{2b''}{\alpha} vw + \frac{2b''}{\beta} wu + 2b''uv = 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$f(u, v, w) = \alpha\beta uv + \alpha uw + \beta vw + \lambda w^2 = 0,$$

λ étant une variable.

Les coordonnées des axes sont déterminées par les équations

$$\frac{f'_u}{u - v \cos\theta} = \frac{f'_v}{v - u \cos\theta},$$

$$f'_w = 0,$$

ou

$$\frac{\alpha(\beta v + w)}{u - v\cos\theta} = \frac{\beta(\alpha u + w)}{v - u \cos\theta},$$

$$\alpha u + \beta v + 2\lambda w = 0.$$

On aura l'équation de l'enveloppe en éliminant λ entre ces deux équations. Mais la première ne renfermant pas le paramètre λ est précisément l'équation de l'enveloppe.

On peut l'écrire

$$\alpha(\beta v + w)(v - u\cos\theta) - \beta(\alpha u + w)(u - v\cos\theta) = 0,$$

ou

$$\alpha\beta(u^2 - v^2) + uw(\beta + \alpha \cos \theta) - vw(\alpha + \beta \cos \theta) = 0.$$

L'enveloppe est une parabole dont l'axe a pour paramètres directeurs $\beta + \alpha \cos \theta$ et $-(\alpha + \beta \cos \theta)$; cet axe est donc perpendiculaire à la droite qui joint le point O au milieu I de AB.

On voit en outre que les coordonnées des tangentes issues du point O à cette parabole satisfont à la relation

$$u^2 - v^2 = 0,$$

c'est-à-dire que ces tangentes sont les bissectrices des axes de coordonnées. Le point O est donc sur la directrice, qui se trouve être ainsi la droite OI, puisque cette droite est perpendiculaire à l'axe.

132. Tangentes aux sommets. — Les tangentes aux sommets, c'est-à-dire aux points où les axes rencontrent la conique, sont parallèles aux axes.

On aura les directions des axes en éliminant w entre les équations (5) ; on obtient

$$(B'' - A' \cos \theta)u^2 - uv(A - A') - (B'' - A \cos \theta)v^2 = 0.$$

Les coordonnées des tangentes aux sommets devront vérifier cette équation ; elles vérifieront aussi l'équation de la conique

$$f(u, v, w) = 0.$$

On peut donc dire que ces deux équations déterminent les tangentes aux sommets.

On aura les sommets eux-mêmes en prenant les points de contact de ces tangentes.

133. Les calculs sont beaucoup plus simples dans le cas de la parabole.

La direction perpendiculaire à l'axe a, comme nous l'avons vu, pour paramètres directeurs $b + b' \cos \theta$ et $-(b' + b \cos \theta)$.

Les coordonnées de la tangente au sommet satisferont aux deux équations

$$u(b + b' \cos \theta) - v(b' + b \cos \theta) = 0,$$

$$f(u, v, w) = 0.$$

Supposons, pour simplifier, les axes de coordonnées rectan-

gulaires ; la première équation devient

$$bu - b'v = 0;$$

on en tire

$$u = b', \qquad v = b,$$

et en remplaçant dans la seconde il vient

$$ab'^2 + a'b^2 + 2bb'b'' + 2w(b^2 + b'^2) = 0,$$

d'où

$$w = -\frac{ab'^2 + a'b^2 + 2bb'b''}{2(b^2 + b'^2)},$$

et l'équation de la tangente au sommet est

$$b'x + by - \frac{ab'^2 + a'b^2 + 2bb'b''}{2(b^2 + b'^2)} = 0.$$

Le sommet s'obtient, soit en prenant le point de contact de cette droite, soit en prenant l'intersection de l'axe et de la tangente au sommet.

EXERCICES ET NOTES

1. L'équation générale tangentielle des coniques qui ont pour centre le point (x, y) est

$$au^2 + a'v^2 + 2b''uv + 2xuw + 2yvw + w^2 = 0.$$

Dans certains problèmes, on peut partir de cette équation pour obtenir le lieu des centres d'une conique variable.

2. *Lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites à un triangle.*

Prenons deux côtés du triangle pour axes. $OA = \alpha$, $OB = \beta$. L'équation de la courbe est

$$2b''uv + 2xuw + 2yvw + w^2 = 0,$$

avec la condition

$$\frac{2b''}{\alpha\beta} - \frac{2x}{\alpha} - \frac{2y}{\beta} + 1 = 0.$$

Pour que la conique soit une hyperbole équilatère, il faut qu'on ait

$$-x^2 - y^2 - 2\cos\theta(xy - b'') = 0.$$

Éliminant b'' entre ces équations, on a l'équation du lieu,

$$\frac{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}{\alpha\beta\cos\theta} - \frac{2x}{\alpha} - \frac{2y}{\beta} + 1 = 0,$$

qui représente le cercle conjugué par rapport au triangle.

3. *Lieu des centres des coniques tangentes en un point donné à une droite donnée, connaissant une droite et son pôle.*

Le lieu est une droite.

4 *Lieu des centres des coniques tangentes à deux droites et passant par deux points.*

Le lieu est une conique passant par le point d'intersection des deux droites, par le milieu de la distance qui sépare les deux points, par le milieu de la partie interceptée par les droites données sur la droite qui joint les deux points.

5. *Soit xOy un angle fixe circonscrit à une conique, et* AB *une tangente telle que la partie* AB *comprise entre les côtés de l'angle ait une longueur minimum. Démontrer que les points* A *et* B *sont équidistants du centre.*

La conique étant tangente aux deux axes a pour équation

$$2\lambda uv + 2xuw + 2yvw + w^2 = 0.$$

Soit $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$ l'équation de la tangente AB ; on aura

$$2\lambda - 2\beta x - 2\alpha y + \alpha\beta = 0$$

et

$$\overline{AB}^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta.$$

Différentions ces deux équations ; on aura

$$-2x d\beta - 2y d\alpha + \alpha d\beta + \beta d\alpha = 0,$$

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta - (\alpha d\beta + \beta d\alpha)\cos\theta = 0.$$

En éliminant $d\alpha$ et $d\beta$ on trouve

$$\frac{2x - \alpha}{\beta - \alpha\cos\theta} = \frac{2y - \beta}{\alpha - \beta\cos\theta},$$

qui montre que le centre est sur la droite perpendiculaire à AB menée en son milieu.

6. *Un triangle* ABC *est circonscrit à une conique, les points de*

contact étant a, b, c. Démontrer que la droite qui joint le sommet A *au point d où le diamètre* O*a rencontre la corde de contact bc passe par le milieu du côté* BC.

7. *Une hyperbole est tangente aux axes d'une ellipse et les asymptotes de l'hyperbole sont tangentes à l'ellipse ; démontrer que le centre de l'hyperbole est sur l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.*

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0, \quad (1)$$

$$2\lambda uv + 2xuw + 2yvw + w^2 = 0 \quad (2)$$

étant les équations de l'ellipse et de l'hyperbole ; les asymptotes de l'hyperbole sont déterminées par les équations (2) et (3)

$$ux + vy + w = 0. \quad (3)$$

Il faut écrire que les solutions du système (2) et (3) vérifient l'équation (1). Pour cela, éliminons w entre (2) et (3) puis entre (1) et (3) ; on a les équations

$$(ux + vy)^2 - 2\lambda uv = 0,$$

$$a^2u^2 + b^2v^2 - (ux + vy)^2 = 0,$$

et pour que ces deux équations aient mêmes racines, il faut qu'on ait

$$\frac{a^2 - x^2}{x^2} = \frac{b^2 - y^2}{y^2}$$

ou

$$a^2y^2 - b^2x^2 = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

8. *On mène une tangente commune à deux coniques concentriques et on joint les points de contact au centre ; démontrer que ces droites et les cordes communes qui passent par le centre forment un faisceau harmonique.*

9. *Étant donnée l'équation tangentielle d'une ellipse,*

$$f(u, v, w) = 0,$$

trouver l'équation de l'ensemble des diamètres conjugués égaux.

10. *On considère des coniques ayant un centre fixe et tangentes à une droite donnée en un point donné. Trouver le lieu des pôles d'une droite fixe et l'enveloppe des polaires d'un point fixe.*

11. On a vu, dans la recherche des axes d'une conique définie par l'équation tangentielle $f(u, v, w) = 0$, que les coordonnées de ces droites satisfont à l'équation

$$\frac{f'_u}{u - v \cos \theta} = \frac{f'_v}{v - u \cos \theta}.$$

Cette équation représente une parabole enveloppe des droites qui sont perpendiculaires aux droites qui joignent leurs pôles à l'origine.

Les axes de la conique sont alors les tangentes menées du centre à cette parabole.

12. *Enveloppe des axes des paraboles inscrites dans un triangle rectangle.*

L'enveloppe est une courbe de troisième classe dont l'équation tangentielle est

$$(u^2 + v^2)w + (u^2 - v^2)(u\alpha - v\beta) = 0,$$

les axes de coordonnées étant les côtés de l'angle droit du triangle, α, β désignant les longueurs de ces côtés.

13. *Enveloppe des tangentes aux sommets des paraboles inscrites dans un triangle.*

Prenons pour axes deux côtés du triangle, $OA = \alpha$ et $OB = \beta$. L'équation générale des paraboles tangentes aux trois côtés est

$$2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

avec la condition

$$b\alpha + b'\beta - b'' = 0.$$

La tangente au sommet satisfait à l'équation de la courbe, et en outre elle est perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire à la droite qui a pour coefficient angulaire $\frac{b}{b'}$. On aura donc la condition

$$b(u - v \cos \theta) = b'(v - u \cos \theta).$$

En éliminant b, b', b'' entre ces trois équations, on aura l'équation tangentielle de l'enveloppe ; on trouve

$$w(u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta) - uv[u(\alpha \cos \theta - \beta) + v(\beta \cos \theta - \alpha)] = 0.$$

On trouve la même courbe que dans l'exercice 6 du Chapitre II. On sait en effet que le lieu des foyers des paraboles inscrites dans un triangle est le cercle circonscrit, et que les projections du foyer sur les tangentes sont sur la tangente au sommet.

14. *Lieu des centres des hyperboles équilatères touchant deux droites données en deux points qui sont en ligne droite avec un point fixe.*

15. *Lieu des centres et enveloppe des asymptotes des hyperboles inscrites dans un trapèze.*

16. *Enveloppe des axes et des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.*

On forme l'équation ponctuelle de ces courbes; pour avoir la première enveloppe, on écrit que la droite $ux + vy + w = 0$ coïncide avec le diamètre conjugué de la direction perpendiculaire; pour avoir la deuxième, on écrit que cette droite rencontre les coniques en deux points à l'infini.

Ces deux enveloppes sont des hypocycloïdes à trois rebroussements.



CHAPITRE VIII

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ

134. Étant donnée l'équation tangentielle d'une conique rapportée à des axes quelconques xOy faisant l'angle θ, nous nous proposons de trouver l'équation tangentielle de cette même conique rapportée à ses axes si cette conique est une ellipse ou une hyperbole, à son axe et à sa tangente au sommet si la conique est une parabole.

PREMIER CAS. $a'' \neq 0$.

La conique est une ellipse ou une hyperbole.

Dans ce cas la conique admet deux axes dont les coordonnées satisfont aux équations

$$\frac{f'_u}{u - v \cos \theta} = \frac{f'_v}{v - u \cos \theta},$$

$$f'_w = 0.$$

Ces coordonnées sont déterminées à un facteur constant près ; nous pouvons nous donner *a priori* une relation entre ces quantités ; nous les assujettirons à la condition

$$u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta = 1.$$

Nous désignerons par

$$u_1 x + v_1 y + w_1 = 0,$$

$$u_2 x + v_2 y + w_2 = 0$$

les équations des deux axes avec les relations

$$\begin{aligned} u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1 \cos\theta &= 1, \\ u_2^2 + v_2^2 - 2u_2v_2 \cos\theta &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Nous prenons ces droites pour nouveaux axes de coordonnées, la première pour axe des y' et la deuxième pour axe des x'.

Nous désignons par x, y et x', y' les coordonnées d'un même point par rapport aux deux systèmes d'axes.

Les coordonnées x' et y' d'un point sont égales, au signe près, aux distances de ce point aux deux axes de la conique. Nous aurons donc, en choisissant convenablement les directions positives $O'x'$ et $O'y'$,

$$x' = (u_1x + v_1y + w_1)\sin\theta,$$

$$y' = (u_2x + v_2y + w_2)\sin\theta,$$

en tenant compte des relations (1).

Soit alors

$$u'x' + v'y' + w' = 0$$

l'équation d'une droite par rapport aux axes $x'O'y'$.

Cette même droite aura pour équation par rapport au premier système,

$$u'(u_1x + v_1y + w_1) + v'(u_2x + v_2y + w_2) + \frac{w'}{\sin\theta} = 0$$

ou

$$x(u_1u' + u_2v') + y(v_1u' + v_2v') + w_1u' + w_2v' + \frac{w'}{\sin\theta} = 0 :$$

Si donc u, v, w désignent les coordonnées de cette droite dans le premier système d'axes, on aura, à un facteur constant près,

$$u = u_1u' + u_2v',$$

$$v = v_1u' + v_2v',$$

$$w = w_1u' + w_2v' + \frac{w'}{\sin\theta}.$$

L'équation de la conique devient alors

$$f\left(u_1u' + u_2v', \quad v_1u' + v_2v', \quad w_1u' + w_2v' + \frac{w'}{\sin\theta}\right) = 0.$$

On peut l'écrire

$$f(u_1u' + u_2v', \quad v_1u' + v_2v', \quad w_1u' + w_2v')$$
$$+ \frac{w'}{\sin\theta} f'_w(u_1u' + u_2v', \quad v_1u' + v_2v' \quad w_1u' + w_2v')$$
$$+ f\left(0, 0, \frac{w'}{\sin\theta}\right) = 0.$$

On peut alors développer les deux premiers termes ; il vient

$$u'^2 f(u_1, v_1, w_1) + u'v'(u_2 f'_{u_1} + v_2 f'_{v_1} + w_2 f'_{w_1}) + v'^2 f(u_2, v_2, w_2)$$
$$+ \frac{u'w'}{\sin\theta} f'_w(u_1, v_1, w_1) + \frac{w'v'}{\sin\theta} f'_w(u_2, v_2, w_2) + a'' \frac{w'^2}{\sin^2\theta} = 0.$$

Or, u_1, v_1, w_1 et u_2, v_2, w_2 étant les coordonnées des axes, les coefficients de $u'v'$, $u'w'$ et $v'w'$ sont nuls.

De plus, nous avons vu (125) que

$$f'_{u_1} = 2S_1(u_1 - v_1 \cos\theta),$$
$$f'_{v_1} = 2S_1(v_1 - u_1 \cos\theta),$$
$$f'_{w_1} = 0,$$

S_1 désignant une racine de l'équation

$$F(S) = \Delta - S(A + A' - 2B'' \cos\theta) + a''S^2 \sin^2\theta = 0.$$

En multipliant les trois équations précédentes respectivement par u_1, v_1, w_1, et ajoutant, on a

$$u_1 f'_{u_1} + v_1 f'_{v_1} + w_1 f'_{w_1} = 2S_1(u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1 \cos\theta)$$

ou

$$f(u_1, v_1, w_1) = S_1.$$

On aurait de même

$$f(u_2, v_2, w_2) = S_2,$$

et l'équation réduite est

$$S_1u'^2 + S_2v'^2 + \frac{a''}{\sin^2\theta} w'^2 = 0,$$

S_1 et S_2 désignant les deux racines de l'équation en S qu'on peut aussi écrire

$$\begin{vmatrix} a - S & b'' + S\cos\theta & b' \\ b'' + S\cos\theta & a' - S & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit immédiatement l'équation ponctuelle de la conique :

$$\frac{x'^2}{S_1} + \frac{y'^2}{S_2} + \frac{\sin^2 \theta}{a''} = 0.$$

135. On peut, en partant de cette équation, retrouver les conditions pour que l'équation donnée représente une ellipse ou une hyperbole.

Pour que l'équation réduite représente une ellipse, il faut que S_1 et S_2 soient de même signe, c'est-à-dire que le produit des racines de l'équation en S soit positif.

On a ainsi

$$a''\Delta > 0.$$

Pour que l'ellipse soit réelle, il faut que les deux racines soient de signe contraire à a''. Or la somme des racines est

$$\frac{(A + A' - 2B'' \cos \theta)}{a'' \sin^2 \theta};$$

on devra donc avoir

$$A + A' - 2B'' \cos \theta < 0.$$

Or, il est aisé de voir que le premier membre de cette inégalité a le signe des deux quantités A et A' ; il nous suffit de démontrer que l'on a

$$| A + A' | > | 2B'' \cos \theta |$$

ou

$$(A + A')^2 - 4B''^2 \cos^2 \theta > 0$$

ou encore

$$A^2 + 2AA'(1 - 2 \cos^2 \theta) + A'^2 + 4(AA' - B''^2) \cos^2 \theta > 0.$$

Or le trinome $A^2 + 2AA'(1 - 2\cos^2 \theta) + A'^2$ est toujours positif, ainsi que le coefficient de $\cos^2 \theta$.

On en conclut que l'ellipse est réelle si A ou A' est négatif, et imaginaire dans le cas contraire.

La conique sera une hyperbole si S_1 et S_2 sont de signes contraires, c'est-à-dire si

$$a''\Delta < 0.$$

Tous ces résultats sont contenus dans le tableau qui termine le numéro 98.

136. Les carrés des demi-longueurs des axes sont $-\frac{S_1 \sin^2 \theta}{a''}$ et $-\frac{S_2 \sin^2 \theta}{a''}$.

Si ρ désigne la demi-longueur d'un axe et S la racine correspondante de l'équation en S, on aura

$$\rho^2 = -\frac{S \sin^2 \theta}{a''},$$

d'où

$$S = -\frac{a''\rho^2}{\sin^2 \theta}.$$

On aura l'équation aux demi-longueurs des axes en remplaçant S par cette valeur dans l'équation en S. On obtient

$$a''^3\rho^4 + a''(A + A' - 2B'' \cos \theta)\rho^2 + \Delta \sin^2 \theta = 0.$$

137. Deuxième cas. $a'' = 0$.

La conique est une parabole.

L'équation en S admet une seule racine, $\frac{\Delta}{A + A' - 2B'' \cos \theta}$, et à cette racine correspond un axe que nous prendrons pour axe des x', en écrivant son équation sous la forme

$$u_2 x + v_2 y + w_2 = 0,$$

avec la condition

$$u_2^2 + v_2^2 - 2u_2v_2 \cos \theta = 1.$$

Pour axe des y' nous prendrons la tangente au sommet, et nous écrirons son équation

$$u_1 x + v_1 y + w_1 = 0,$$

avec la condition

$$u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1 \cos \theta = 1.$$

L'équation de la conique devient alors comme précédemment

$$u'^2 f(u_1, v_1, w_1) + u'v'(u_2 f'_{u_1} + v_2 f'_{v_1} + w_2 f'_{w_1}) + v'^2 f(u_2, v_2, w_2)$$
$$+ \frac{u'w'}{\sin \theta} f'_w(u_1, v_1, w_1) + \frac{v'w'}{\sin \theta} f'_w(u_2, v_2, w_2) = 0.$$

u_2, v_2, w_2 étant les coordonnées de l'axe, on a

$$f'_w(u_2, v_2, w_2) = 0$$

et

$$f(u_2, v_2, w_2) = S_2 = \frac{\Delta}{A + A' - 2B'' \cos \theta}.$$

Comme u_1, v_1, w_1 sont les coordonnées de la tangente au sommet, on aura

$$f(u_1, v_1, w_1) = 0$$

et

$$u_2 f'_{u_1} + v_2 f'_{v_1} + w_2 f'_{w_1} = 0,$$

puisque le point de contact de cette tangente est situé sur l'axe.

L'équation réduite est donc

$$S_2 v'^2 + \frac{u'w'}{\sin \theta} f'_w(u_1, v_1, w_1) = 0$$

ou

$$S_2 v'^2 + \frac{2u'w'}{\sin \theta}(b'u_1 + bv_1) = 0;$$

u_1 et v_1 seront déterminés (133) par les équations

$$\frac{u_1}{b' + b \cos \theta} = \frac{v_1}{b + b' \cos \theta}$$

et

$$u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos \theta = 1.$$

On en déduit sans peine

$$b'u_1 + bv_1 = \pm \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta}.$$

Remarquons aussi que

$$A + A' - 2B'' \cos \theta = -(b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta),$$

puisque $a'' = 0$; par suite

$$S_2 = -\frac{\Delta}{b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta}.$$

L'équation réduite peut donc s'écrire

$$\Delta v'^2 \sin^2 \theta \pm 2u'w'(b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Si p désigne le paramètre, l'équation s'écrit

$$pv'^2 \pm 2u'w' = 0,$$

et l'on a

$$p = \frac{|\Delta| \sin^2 \theta}{(b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$|\Delta|$ désignant la valeur absolue de Δ.

138. Applications numériques. — 1° Soit à trouver l'équation réduite de l'hyperbole équilatère déjà étudiée au numéro 99.

Son équation, rapportée à des axes rectangulaires, est

$$u^2 + w^2 + 2vw - 2uv = 0.$$

On a

$$a'' = 1, \qquad \Delta = -2, \qquad A = -1, \qquad A' = 1;$$

l'équation en S est donc

$$-2 + S^2 = 0;$$

par conséquent l'équation réduite est

$$\sqrt{2}(u'^2 - v'^2) + w'^2 = 0.$$

Son équation ponctuelle est

$$x'^2 - y'^2 + \sqrt{2} = 0.$$

2° Considérons maintenant la parabole qui a pour équation

$$u^2 - 4uv + 4v^2 - 2uw + vw = 0.$$

Calculons son paramètre, en supposant droit l'angle des axes,

$$\Delta = -\frac{9}{4}, \qquad b^2 + b'^2 = \frac{5}{4};$$

par conséquent

$$p = \frac{18}{5\sqrt{5}}.$$

139. Dans les problèmes où figurent des coniques de grandeur constante, il faut se servir de l'équation aux longueurs des axes ou de l'expression du paramètre.

Si l'on veut écrire par exemple qu'une ellipse a pour demi-longueurs d'axes α et β, on écrira que l'équation en ρ^2

$$a''^3\rho^4 + a''(A + A' - 2B'' \cos \theta)\rho^2 + \Delta \sin^2 \theta = 0$$

a pour racines α^2 et β^2, c'est-à-dire que

$$\alpha^2 + \beta^2 = -\frac{A + A' - 2B'' \cos\theta}{a''^2},$$

$$\alpha^2\beta^2 = +\frac{\Delta \sin^2\theta}{a''^3}.$$

140. Problème. — *Une ellipse de grandeur constante tourne autour de son centre ; trouver le lieu du pôle d'une droite fixe et l'enveloppe de la polaire d'un point fixe.*

Prenons deux axes rectangulaires passant par le centre de l'ellipse, l'axe des y étant parallèle à la droite fixe.

Soit

$$x - p = 0$$

l'équation de la droite fixe ; appelons α et β les demi-axes de l'ellipse.

L'équation de cette courbe sera

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + 2b''uv + w^2 = 0 ;$$

on peut en effet supposer qu'on a préalablement divisé le premier membre de l'équation par a'' ; de plus le centre étant à l'origine, les coordonnées de ce point sont nulles.

Écrivons que les demi-longueurs des axes sont égales à α et β ; on a (139)

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= -(a + a'), \\ \alpha^2\beta^2 &= aa' - b''^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les coordonnées du pôle d'une droite (u, v, w) sont

$$x = \frac{f'_u}{f'_w} = \frac{au + b''v}{w},$$

$$y = \frac{f'_v}{f'_w} = \frac{b''u + a'v}{w};$$

nous aurons les coordonnées du pôle de la droite fixe donnée, en faisant dans ces formules

$$u = 1, \qquad v = 0, \qquad w = -p.$$

On obtient

$$x = \frac{a}{-p}, \qquad y = \frac{b''}{-p}. \qquad (3)$$

En éliminant a, a' et b'' entre les équations (2) et (3), on aura l'équation du lieu.

On obtient sans difficulté

$$p^2(x^2 + y^2) - px(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta^2 = 0,$$

équation d'un cercle qui a son centre sur Ox.

Cherchons maintenant l'enveloppe des polaires d'un point par rapport à la même ellipse.

Prenons deux axes rectangulaires passant par le centre de l'ellipse, l'axe des x contenant le point fixe, dont nous désignerons l'abscisse par d.

Si u, v, w sont les coordonnées de la polaire de ce point, on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{au + b''v}{w} &= d, \\ b''u + a'v &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

En éliminant a, a' et b'' entre les équations (2) et (4), on aura l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée.

On trouve

$$\alpha^2\beta^2(u^2 + v^2) + d^2w^2 + d(\alpha^2 + \beta^2)uw = 0.$$

On voit que l'enveloppe est une hyperbole $(a''\Delta < 0)$ symétrique par rapport à $0x$, puisque l'équation ne change pas quand on change v en $-v$.

Le centre a pour abscisse $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2d}$; on a aisément les sommets en cherchant les tangentes parallèles à $0'y$ c'est-à-dire en écrivant que $x - \lambda = 0$ est tangente ; on trouve ainsi que les sommets ont pour abscisses $\frac{\alpha^2}{d}$ et $\frac{\beta^2}{d}$, ce qu'on pouvait voir *a priori*.

Enfin, on peut remarquer que les tangentes issues de l'origine satisfont à l'équation

$$u^2 + v^2 = 0\,;$$

elles ont pour coefficients angulaires $\pm i$: l'origine est donc foyer.

141. Deuxième méthode de réduction. — Invariants. — Nous allons démontrer qu'étant donnée l'équation d'une conique

$$f(u, v, w) = 0,$$

il existe certaines fonctions des coefficients et de l'angle des axes qui conservent la même valeur quand on fait une transformation de coordonnées quelconque ; ces fonctions s'appellent des *invariants*.

Dans les formules de transformation (4) établies au numéro 34, nous avons introduit un facteur λ arbitraire ; il est clair que les invariants dépendent de ce nombre ; nous le

choisirons de manière que les racines de l'équation en S soient des invariants.

Il importe pour cela que l'on ait

$$u^2 + v^2 - 2uv \cos\theta = u'^2 + v'^2 - 2u'v' \cos\theta',$$

u, v, w et u', v', w' désignant les coordonnées d'une même droite dans les deux systèmes, θ et θ' les angles xOy et $x'O'y'$.

Égalons les distances du point O' à cette même droite, calculées par rapport aux deux systèmes d'axes; on aura, au signe près,

$$\frac{w' \sin\theta'}{\sqrt{u'^2 + v'^2 - 2u'v' \cos\theta'}} = \frac{(up + vq + w)\sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}$$

ou

$$\frac{u'^2 + v'^2 - 2u'v' \cos\theta'}{w'^2 \sin^2\theta'} = \frac{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}{(up + vq + w)^2 \sin^2\theta}.$$

Pour que les numérateurs soient égaux, il faut que les dénominateurs le soient, c'est-à-dire que

$$w'^2 \sin^2\theta' = (up + vq + w)^2 \sin^2\theta.$$

Mais nous avons la formule

$$\lambda w' = up + vq + w.$$

On doit donc avoir

$$\lambda = \pm \frac{\sin\theta'}{\sin\theta};$$

on peut prendre le signe $+$, et les formules de transformation deviennent, en remarquant que $\beta - \alpha = \theta'$:

$$u = \frac{u' \sin\beta - v' \sin\alpha}{\sin\theta},$$

$$v = \frac{-u' \sin(\theta - \beta) + v' \sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta},$$

$$w = \frac{-p\sin\beta + q\sin(\theta - \beta)}{\sin\theta}u' + \frac{p\sin\alpha - q\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta}v' + \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}w'.$$

Le module de la substitution est alors

$$\mu = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} \begin{vmatrix} \dfrac{\sin \beta}{\sin \theta} & -\dfrac{\sin \alpha}{\sin \theta} \\ -\dfrac{\sin (\theta - \beta)}{\sin \theta} & \dfrac{\sin (\theta - \alpha)}{\sin \theta} \end{vmatrix} = \frac{\sin^2 \theta'}{\sin^2 \theta}.$$

Cela posé, remplaçons dans le premier membre de l'équation de la conique $f(u, v, w)$, u, v, w par les valeurs ci-dessus ; $f(u, v, w)$ devient une nouvelle forme quadratique

$$f_1(u', v', w') = a_1 u'^2 + a'_1 v'^2 + a''_1 w'^2 + 2b_1 v'w' + 2b'_1 w'u' + 2b''_1 u'v'.$$

Si Δ_1 désigne son discriminant, on sait que

$$\Delta_1 = \mu^2 \Delta,$$

ou en remplaçant μ par sa valeur,

$$\frac{\Delta_1}{\sin^4 \theta'} = \frac{\Delta}{\sin^4 \theta}.$$

On voit ainsi que l'expression $\dfrac{\Delta}{\sin^4 \theta}$ est un invariant tel que nous l'avons défini.

Démontrons maintenant que les racines de l'équation en S sont des invariants.

En tenant compte des formules de transformation, on a

$$f(u, v, w) = f_1(u', v', w'),$$

$$u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta = u'^2 + v'^2 - 2u'v' \cos \theta'.$$

Donc, on a, quel que soit S,

$$f(u, v, w) - S(u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta) = f_1(u', v', w') \\ - S(u'^2 + v'^2 - 2u'v' \cos \theta'),$$

ce qui revient à dire que le second membre se déduit du premier par la transformation indiquée plus haut.

Si l'on désigne par F(S) et $F_1(S)$ les discriminants des formes quadratiques qui figurent dans les deux membres, on aura, quel que soit S,

$$F_1(S) \equiv \mu^2 F(S).$$

Or F(S) et $F_1(S)$ sont les premiers membres des équations

en S relatives aux deux équations

$$f(u, v, w) = 0,$$
$$f_1(u', v', w') = 0;$$

il en résulte que les équations en S ont mêmes racines.

L'identité précédente peut d'ailleurs s'écrire

$$\Delta_1 - (A_1 + A'_1 - 2B''_1 \cos\theta')S + a_1 S^2 \sin^2\theta'$$
$$\equiv \frac{\sin^4\theta'}{\sin^4\theta}[\Delta - (A + A' - 2B'' \cos\theta)S + a'' S^2 \sin^2\theta].$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta_1}{\sin^4\theta'} &= \frac{\Delta}{\sin^4\theta}, \\ \frac{A_1 + A'_1 - 2B''_1 \cos\theta'}{\sin^4\theta'} &= \frac{A + A' - 2B'' \cos\theta}{\sin^4\theta}, \\ \frac{a''_1}{\sin^2\theta'} &= \frac{a''}{\sin^2\theta}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

On voit ainsi que les fonctions

$$\frac{\Delta}{\sin^4\theta}, \qquad \frac{A + A' - 2B'' \cos\theta}{\sin^4\theta}, \qquad \frac{a''}{\sin^2\theta}$$

sont des invariants.

Nous démontrerons plus loin qu'il n'en existe pas d'autres, c'est-à-dire que tout invariant est une fonction de ces trois quantités.

142. On peut déduire très simplement de ces considérations l'équation tangentielle réduite d'une conique.

PREMIER CAS. $a'' \neq 0$.

La conique est une ellipse ou une hyperbole.

L'équation de la conique rapportée à ses axes aura (**123**) la forme

$$a_1 u'^2 + a'_1 v'^2 + a''_1 w'^2 = 0,$$

l'angle θ' des nouveaux axes de coordonnées étant $\frac{\pi}{2}$.

En appliquant les formules (5), on a

$$\left.\begin{aligned} a_1 a'_1 a''_1 &= \frac{\Delta}{\sin^4\theta}, \\ a'_1 a''_1 + a''_1 a_1 &= \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{\sin^4\theta}, \\ a''_1 &= \frac{a''}{\sin^2\theta}; \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

on déduit de là

$$a_1 + a'_1 = \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{a''\sin^2\theta},$$

$$a_1 a'_1 = \frac{\Delta}{a''\sin^2\theta}.$$

On voit ainsi que a_1 et a'_1 sont racines de l'équation

$$a''S^2\sin^2\theta - (A + A' - 2B''\cos\theta)S + \Delta = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation en S, et que

$$a''_1 = \frac{a''}{\sin^2\theta}.$$

L'équation réduite sera donc

$$S_1 u'^2 + S_2 v'^2 + \frac{a''}{\sin^2\theta} w'^2 = 0.$$

143. Nous pouvons maintenant établir que tout invariant est une fonction des trois invariants trouvés plus haut, à savoir,

$$\frac{\Delta}{\sin^4\theta}, \qquad \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{\sin^4\theta}, \qquad \frac{a''}{\sin^2\theta}.$$

En effet, s'il existait un quatrième invariant H, on aurait la relation

$$H = H_1, \tag{7}$$

H_1 désignant cet invariant formé avec les coefficients de la forme réduite.

En éliminant a_1, a'_1, a''_1 entre les équations (6) et (7), on aurait une relation entre les coefficients a, a', a'', b, b', b'', ce

qui est manifestement impossible, puique ces coefficients peuvent être choisis arbitrairement.

Il faut donc que la relation (7) soit conséquence des relations (6), c'est-à-dire que H soit fonction des trois premiers invariants.

144. On peut même par ce procédé trouver l'équation de la conique rapportée à deux diamètres conjugués faisant l'angle θ'.

Cette équation a toujours la forme simple

$$a_1 u'^2 + a'_1 v'^2 + a''_1 w'^2 = 0,$$

et l'on a

$$\frac{a_1 a'_1 a''_1}{\sin^4 \theta'} = \frac{\Delta}{\sin^4 \theta},$$

$$\frac{a''_1(a_1 + a'_1)}{\sin^4 \theta'} = \frac{A + A' - 2B'' \cos \theta}{\sin^4 \theta},$$

$$\frac{a''_1}{\sin^2 \theta'} = \frac{a''}{\sin^2 \theta}.$$

On en déduit

$$\frac{a_1 + a'_1}{\sin^2 \theta'} = \frac{A + A' - 2B'' \cos \theta}{a'' \sin^2 \theta},$$

$$\frac{a_1 a'_1}{\sin^2 \theta'} = \frac{\Delta}{a'' \sin^2 \theta}.$$

L'équation sera donc

$$\sigma_1 u'^2 + \sigma_2 v'^2 + \frac{a'' \sin^2 \theta'}{\sin^2 \theta} w'^2 = 0,$$

σ_1 et σ_2 étant les racines de l'équation

$$a''\sigma^2 \sin^2 \theta - (A + A' - 2B'' \cos \theta)\sigma \sin^2 \theta' + \Delta \sin^2 \theta' = 0.$$

On pourrait déduire de là les théorèmes d'Apollonius.

145. Deuxième cas. $a'' = 0$.

La conique est une parabole.

On peut avoir *a priori* la forme de l'équation de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité.

La courbe passant par l'origine et ayant pour tangente $O'y'$.

l'ensemble des termes du deuxième degré en u' et v' se réduit à $a'_1 v'^2$; de plus la direction $O'x'$ étant la direction asymptotique, on a $b_1 = 0$, de telle sorte que l'équation est

$$a'_1 v'^2 + 2b'_1 u' w' = 0.$$

Si les axes sont rectangulaires, la parabole est rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.

Écrivons les formules (5), qui sont au nombre de deux, puisque $a'' = a''_1 = 0$:

$$-a'_1 b'^2_1 = \frac{\Delta}{\sin^4 \theta},$$

$$-b'^2_1 = \frac{A + A' - 2B'' \cos \theta}{\sin^4 \theta};$$

on en tire

$$a'_1 = \frac{\Delta}{A + A' - 2B'' \cos \theta} = \frac{-\Delta}{b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta},$$

$$b^1 = \pm \frac{\sqrt{-(A + A' - 2B'' \cos \theta)}}{\sin^2 \theta} = \pm \frac{\sqrt{b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta}}{\sin^2 \theta}.$$

L'équation réduite est alors

$$-\frac{\Delta v'^2}{b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta} \pm \frac{2\sqrt{b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta}}{\sin^2 \theta} u' w' = 0$$

ou

$$\frac{\Delta v'^2 \sin^2 \theta}{(b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \pm 2u' w' = 0.$$

Le paramètre p a donc pour expression

$$p = \frac{|\Delta| \sin^2 \theta}{(b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

On pourrait aussi, d'une façon analogue, obtenir l'équation de la parabole rapportée à un diamètre quelconque et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre, en se donnant l'angle θ' de ces deux droites.

146. Exercice. — *Trouver l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes.*

Soit

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0$$

l'équation d'une hyperbole rapportée à deux axes faisant l'angle θ.

Nous nous proposons de trouver l'équation de cette courbe rapportée à ses asymptotes.

Le centre étant à l'origine, on aura

$$b'_1 = b_1 = 0.$$

De plus les tangentes issues de l'origine étant les deux axes, les termes du second degré en u' et v' se réduiront à $2b''_1u'v'$, de telle sorte que l'équation de la courbe sera

$$2b''_1u'v' + a''_1w'^2 = 0.$$

Les relations entre invariants peuvent alors s'écrire, en désignant par θ' l'angle des asymptotes,

$$\frac{-a''_1b''^2_1}{\sin^4\theta'} = \frac{\Delta}{\sin^4\theta},$$

$$\frac{2a''_1b''_1\cos\theta'}{\sin^4\theta'} = \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{\sin^4\theta},$$

$$\frac{a''_1}{\sin^2\theta'} = \frac{a''}{\sin^2\theta}.$$

De ces formules on peut tirer a''_1, b''_1 et θ'.

En divisant les deux premières successivement par la dernière, on a

$$\frac{-b''^2_1}{\sin^2\theta'} = \frac{\Delta}{a''\sin^2\theta},$$

$$\frac{2b''_1\cos\theta'}{\sin^2\theta'} = \frac{A + A' - 2B''\cos\theta}{a''\sin^2\theta},$$

et, en éliminant b''_1, il vient

$$\operatorname{tg}^2\theta' = -\frac{4\Delta a''\sin^2\theta}{(A + A' - 2B''\cos\theta)^2};$$

on en déduit aisément a''_1 et b''_1.

EXERCICES ET NOTES

1. On peut obtenir les longueurs des axes d'une conique représentée par son équation tangentielle, en revenant à l'équation ponctuelle, et en transformant les résultats connus.

Soit

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0$$

l'équation d'une conique à centre.

L'équation ponctuelle de cette conique est

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

et l'on sait que les demi-longueurs des axes sont racines de l'équation

$$d^3\rho^4 + EDd\rho^2 + D^2 \sin^2 \theta = 0,$$

où l'on désigne par D le discriminant de la fonction $\varphi(x, y, z)$ et où l'on pose

$$d = A'A'' - B^2, \qquad E = A + A' - 2B'' \cos \theta.$$

Or on a $\qquad D = \Delta^2, \qquad d = a''\Delta;$

en remplaçant, on obtient l'équation trouvée au numéro 136,

$$a''^3\rho^4 + Ea''\rho^2 + \Delta \sin^2 \theta = 0.$$

On peut faire un calcul analogue pour la parabole.

2. *Lieu du centre d'une ellipse de grandeur constante tangente à une droite donnée en un point donné.*

Prenons le point pour origine et la droite pour axe des x ; l'équation de la courbe sera

$$\lambda u^2 + 2xuw + 2yvw + w^2 = 0;$$

écrivons que ses axes sont égaux à a et b ; on a

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2 - \lambda, \qquad a^2b^2 = -\lambda y^2;$$

éliminant λ entre ces deux équations, on a l'équation du lieu.

3. *Enveloppe de l'axe d'une parabole de paramètre donné tangente à deux droites rectangulaires.*

4. *Lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle et dont la somme des carrés des axes est constante* (Steiner).

Le lieu est un cercle qui a pour centre le point de concours des hauteurs du triangle, et qui se réduit au cercle conjugué si la somme donnée est nulle, c'est-à-dire si les coniques sont des hyperboles équilatères. (Voir ex. 2, p. 138).

5. *Parmi toutes les coniques inscrites dans un rectangle donné, il y en a deux qui passent par un point donné* A.

Etudier la nature de ces coniques et trouver le lieu du point A pour lequel les deux ellipses qui y passent ont la même aire ou des aires qui sont dans un rapport donné.

6. *Trouver l'équation tangentielle d'une ellipse donnée rapportée à deux tangentes aux extrémités des diamètres conjugués égaux.*

7. *On considère des hyperboles asymptotes à une droite, tangentes à une autre droite et telles que le rectangle construit sur les axes ait une aire constante. Trouver l'enveloppe de la deuxième asymptote et l'enveloppe des axes.*

Prenons l'asymptote pour axe des x, la tangente pour axe des y; l'équation tangentielle des hyperboles est

$$2b'uw + 2b''uv + w^2 = 0.$$

Soit $4k^2$ l'aire du rectangle construit sur les axes ; on a

$$k^4 = b''^2 \sin^2 \theta,$$

ce qui montre que b'' est constant et a deux valeurs égales et de signes contraires. Le seul paramètre variable est b'.

Les asymptotes satisfont aux équations

$$2b'uw + 2b''uv + w^2 = 0,$$

$$b'u + w = 0;$$

en éliminant b' on a

$$2b''uv - w^2 = 0,$$

qui représente une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Les axes sont déterminés par les équations

$$\frac{b'w + b''v}{u - v\cos\theta} = \frac{b''u}{v - u\cos\theta},$$

$$b'u + w = 0;$$

en éliminant b', on a l'équation tangentielle de l'enveloppe des axes, qui représente une courbe de troisième classe.

8. *Une ellipse de grandeur donnée tourne autour de son centre. Dans chacune de ses positions, on lui mène des tangentes aux points où elle est coupée par deux droites perpendiculaires fixes, menées par ce centre. Trouver le lieu des points de rencontre de ces tangentes.*

Trouver aussi l'enveloppe des cordes de contact ainsi déterminées dans l'ellipse.

9. L'équation d'une ellipse ayant pour centre le point (x, y), pour

axes des droites de coefficients angulaires m et $-\frac{1}{m}$, et pour longueurs d'axes 2α et 2β, est

$$\frac{\alpha^2(u+vm)^2}{1+m^2}+\frac{\beta^2(v-um)^2}{1+m^2}-(ux+vy+w)^2=0.$$

10. *Une ellipse a son centre sur une hyperbole donnée et touche les asymptotes de cette hyperbole ; démontrer que la corde des contacts, correspondant au maximum de l'aire de l'ellipse, est tangente à une hyperbole semblable à l'hyperbole donnée.*

CHAPITRE IX

FOYERS ET DIRECTRICES

147. On appelle foyer d'une conique un point tel que les tangentes issues de ce point à la conique soient parallèles aux droites isotropes, ou, ce qui revient au même, passent par les points cycliques du plan.

Si la conique n'est pas tangente à la droite de l'infini, si c'est une ellipse ou une hyperbole, on pourra par chacun des points cycliques mener deux tangentes à cette conique; ces quatre tangentes se couperont en quatre points qui seront des foyers. Les deux points cycliques étant imaginaires conjugués, les tangentes issues de l'un de ces points sont imaginaires conjuguées respectivement des tangentes issues de l'autre ; les deux tangentes imaginaires conjuguées se couperont en un point réel.

Il en résulte qu'une conique à centre admet deux foyers réels et deux foyers imaginaires conjugués.

Si la conique est tangente à la droite de l'infini, si c'est une parabole, par chaque point cyclique on ne peut mener qu'une tangente, ces deux tangentes déterminent un seul foyer.

Donc la parabole admet un seul foyer réel.

Nous allons maintenant déterminer les coordonnées de ces points.

Soit

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0$$

l'équation tangentielle de la conique.

Cherchons l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues d'un point (x, y) à cette conique. Nous écrirons pour cela que la droite

$$Y - y = m(X - x)$$

est tangente ; on a

$$f(m, -1, y - mx) = 0$$

ou

$$am^2 + a' + a''(y - mx)^2 - 2b(y - mx) + 2b'm(y - mx) - 2b''m = 0$$

et, en ordonnant par rapport à m,

$$m^2(a''x^2 - 2b'x + a) - 2m(a''xy - bx - b'y + b'') + a''y^2 - 2by + a' = 0.$$

Le point (x, y) sera foyer si cette équation a mêmes racines que l'équation

$$m^2 + 2m\cos\theta + 1 = 0,$$

c'est-à-dire si l'on a

$$a''x^2 - 2b'x + a = \frac{a''xy - bx - b'y + b''}{-\cos\theta} = a''y^2 - 2by + a'. \quad (1)$$

Ces équations déterminent les coordonnées des foyers.

Pour discuter aisément, supposons les axes de coordonnées rectangulaires ; l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du point (x, y) doit avoir mêmes racines que l'équation

$$m^2 + 1 = 0;$$

on obtient alors les conditions

$$\left.\begin{aligned} a''(x^2 - y^2) - 2b'x + 2by + a - a' &= 0, \\ a''xy - bx - b'y + b'' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

148. Premier cas. $a'' \neq 0$.

La conique est une ellipse ou une hyperbole.

Les équations (2) représentent deux hyperboles équilatères ayant toutes deux pour centre le point de coordonnées $\frac{b'}{a''}$ et $\frac{b}{a''}$, c'est-à-dire le centre de la conique donnée.

Les asymptotes de l'une sont bissectrices des asymptotes de l'autre ; elles se coupent donc seulement en deux points réels, symétriques par rapport au centre.

Ces hyperboles sont appelées hyperboles focales.

On peut calculer les coordonnées des foyers ; en effet, les équations des hyperboles focales peuvent s'écrire

$$\left(x - \frac{b'}{a''}\right)^2 - \left(y - \frac{b}{a''}\right)^2 = \frac{A - A'}{a''^2},$$

$$\left(x - \frac{b'}{a''}\right)\left(y - \frac{b}{a''}\right) = \frac{B''}{a''^2}.$$

Nous voyons que ces deux courbes ne peuvent se réduire en même temps à un système de deux droites, car pour qu'il en soit ainsi, il faudrait que

$$A - A' = 0, \qquad B'' = 0;$$

la conique donnée serait alors un cercle ; ce cercle passe par les points cycliques, et les tangentes en ces points se coupent au centre, qui peut être considéré comme un foyer singulier.

Pour résoudre les deux équations ci-dessus, posons

$$x - \frac{b'}{a''} = X, \qquad y - \frac{b}{a''} = Y;$$

les équations deviennent

$$X^2 - Y^2 = \frac{A - A'}{a''^2},$$

$$XY = \frac{B''}{a''^2}.$$

On en déduit

$$X^2 + Y^2 = \frac{\sqrt{(A - A')^2 + 4B''^2}}{a''^2},$$

et par suite

$$X^2 = \frac{A - A' + \sqrt{(A - A')^2 + 4B''^2}}{2a''^2},$$

$$Y^2 = \frac{-(A - A') + \sqrt{(A - A')^2 + 4B''^2}}{2a''^2},$$

ou, en extrayant la racine,

$$x - \frac{b'}{a''} = \pm\sqrt{\frac{A - A' + \sqrt{(A - A')^2 + 4B''^2}}{2a''^2}},$$

$$y - \frac{b}{a''} = \pm\sqrt{\frac{A' - A + \sqrt{(A - A')^2 + 4B''^2}}{2a''^2}}.$$

Le produit XY devant avoir le signe de B'', on prendra les mêmes signes devant les radicaux si B'' est positif, et des signes contraires si B'' est négatif; on aura ainsi les coordonnées des deux foyers réels.

Les équations

$$X^2 - Y^2 = \frac{A - A'}{a''^2},$$

$$XY = \frac{B''}{a''^2}$$

sont les équations des hyperboles focales rapportées à leur centre.

En les divisant membre à membre, on obtient

$$B''(X^2 - Y^2) - (A - A')\,XY = 0,$$

qui est l'équation de l'ensemble des axes de la conique donnée. On en conclut que les foyers sont sur les axes.

149. Supposons que la conique soit une ellipse rapportée à ses axes; son équation sera

$$f(u, v, w) = a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du point (x, y) est

$$a^2m^2 + b^2 - (y - mx)^2 = 0$$

ou

$$m^2(a^2 - x^2) + 2mxy + b^2 - y^2 = 0.$$

Le point (x, y) sera foyer si l'on a

$$x^2 - y^2 - (a^2 - b^2) = 0,$$

$$xy = 0.$$

On obtient ainsi les deux foyers réels

$$x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}, \qquad y = 0,$$

et les deux foyers imaginaires

$$y = \pm\sqrt{b^2 - a^2}, \qquad x = 0.$$

150. Deuxième cas. $a'' = 0$.

La conique est une parabole.

Les équations (2) qui déterminent les foyers deviennent

$$\left.\begin{aligned} -2b'x + 2by + a - a' &= 0, \\ -bx - b'y + b'' &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

elles sont du premier degré ; la parabole n'a donc qu'un foyer, comme nous l'avons déjà vu.

Le déterminant du système est $2(b'^2 + b^2)$; il n'est jamais nul, car b et b' ne sont pas nuls en même temps.

En résolvant, on a

$$x = \frac{(a - a')b' + 2bb''}{2(b^2 + b'^2)},$$

$$y = -\frac{(a - a')b - 2b'b''}{2(b^2 + b'^2)},$$

ce sont les coordonnées du foyer.

151. Les équations (3) représentent deux droites rectangulaires passant par le foyer. L'une d'elles a pour coefficient angulaire $-\frac{b}{b'}$, et nous savons que l'axe a pour coefficient angulaire $\frac{b}{b'}$; il en résulte que les deux droites représentées par les équations (3) font avec les axes de coordonnées les mêmes angles en sens inverse que l'axe de la courbe et la tangente au sommet.

152. On pourrait déduire de là l'équation de l'axe, en prenant une droite quelconque passant par l'intersection des droites (3)

$$-2b'x + 2by + a - a' + \lambda\,(-bx - b'y + b'') = 0,$$

et en déterminant λ en sorte que cette droite ait pour coefficient angulaire $\frac{b}{b'}$.

On trouve ainsi

$$\lambda = \frac{b^2 - b'^2}{bb'},$$

et l'équation de l'axe devient

$$bx - b'y + \frac{b''(b'^2 - b^2) - bb'(a - a')}{b^2 + b'^2}$$

comme on l'a déjà trouvé au numéro 130.

153. Si la courbe est rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, son équation est

$$pv^2 - 2uw = 0;$$

on trouvera sans peine que les coordonnées du foyer sont

$$x = \frac{p}{2}, \qquad y = 0.$$

154. Les équations qui déterminent les foyers d'une conique renferment linéairement les coefficients de l'équation tangentielle de cette conique. Par conséquent, dans la recherche de lieux géométriques de foyers, il y aura souvent avantage à définir la conique variable par son équation tangentielle, surtout quand les conditions imposées à cette conique s'exprimeront simplement à l'aide des coefficients de cette équation; par exemple, si la conique est assujettie à être tangente à des droites, les points de contact étant fixes ou variables; à avoir son centre en un point donné; etc.

155. Applications. — 1° *Lieu des foyers des coniques tangentes aux quatre côtés d'un parallélogramme.*

Nous prendrons pour axes les droites passant par le centre du parallélogramme et parallèles aux côtés; les équations de ces côtés seront

$$x - \alpha = 0, \qquad x + \alpha = 0, \qquad y - \beta = 0, \qquad y + \beta = 0.$$

Écrivons que ces droites sont tangentes à la conique

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0;$$

il vient

$$a + a''\alpha^2 - 2b'\alpha = 0,$$
$$a + a''\alpha^2 + 2b'\alpha = 0,$$
$$a' + a''\beta^2 - 2b\beta = 0,$$
$$a' + a''\beta^2 + 2b\beta = 0.$$

On en déduit

$$b' = b = 0,$$

ce qui montre que ces coniques ont pour centre l'origine, et

$$a + a''\alpha^2 = 0,$$
$$a' + a''\beta^2 = 0.$$

Remplaçons dans l'équation a et a' par leurs valeurs $-a''\alpha^2$ et $-a''\beta^2$; il vient

$$-a''[\alpha^2u^2 + \beta^2v^2 - w^2] + 2b''uv = 0;$$

en posant $-\frac{b''}{a''} = \lambda$, on a l'équation générale des coniques consi-

dérées,

$$\alpha^2u^2 + \beta^2v^2 - w^2 + 2\lambda uv = 0.$$

Pour avoir les foyers de cette conique, on peut, soit écrire les équations (1) du numéro 147, soit former directement l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du point (x, y), et écrire que ces tangentes sont parallèles aux droites isotropes.

On trouve ainsi que les deux équations

$$\alpha^2m^2 + \beta^2 - (y - mx)^2 - 2\lambda m = 0,$$

$$m^2 + 2m\cos\theta + 1 = 0$$

doivent avoir mêmes racines, ce qui donne

$$\alpha^2 - x^2 = \frac{xy - \lambda}{\cos\theta} = \beta^2 - y^2.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on aura l'équation du lieu. Cette élimination est toute faite : on a

$$x^2 - y^2 = \alpha^2 - \beta^2,$$

qui représente l'hyperbole équilatère circonscrite au parallélogramme.

2° *Lieu du foyer d'une parabole de grandeur constante qui se déplace en restant tangente à deux droites rectangulaires.*

Prenons les droites données pour axes. Soit

$$f(u, v, w) \doteq au^2 + a'v^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0$$

l'équation de la parabole : pour qu'elle soit tangente aux axes, il faut qu'on ait

$$a = a' = 0.$$

Écrivons que le paramètre est égal à p; on a (137)

$$\pm p = \frac{2bb'b''}{(b^2 + b'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et le foyer est déterminé par les équations

$$-2b'x + 2by = 0,$$

$$-bx - b'y + b'' = 0.$$

On aura le lieu du foyer en éliminant b, b' et b'' entre ces trois équations.

Des deux dernières on tire

$$\frac{b}{x} = \frac{b'}{y} = \frac{b''}{x^2 + y^2};$$

remplaçons dans la première, qui peut s'écrire

$$p^2(b^2 + b'^2)^3 = 4b^2b'^2b''^2,$$

b, b', b'' par des quantités proportionnelles ; on a

$$p^2(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2\,(x^2+y^2)^2$$

ou

$$p^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2,$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{4}{p^2},$$

équation d'une *Kreuzcurve* aisée à construire.

156. Directrices. — On appelle directrice relative à un foyer la polaire de ce foyer, ce qui revient à dire que la directrice est une droite telle que les tangentes menées à la conique aux points de rencontre avec cette droite soient parallèles aux droites isotropes.

Proposons-nous de déterminer analytiquement les coordonnées des directrices.

Soient (u, v, w) une directrice et (u_0, v_0, w_0) une tangente dont le point de contact est sur la directrice ; on a

$$f(u_0, v_0, w_0) = 0,$$

$$u_0 f'_u + v_0 f'_v + w_0 f'_w = 0;$$

en éliminant w_0 entre ces deux équations, nous aurons

$$f\left(u_0, v_0, -\frac{u_0 f'_u + v_0 f'_v}{f'_w}\right) = 0$$

ou

$$f[u_0 f'_w,\quad v_0 f'_w,\quad -(u_0 f'_u + v_0 f'_v)] = 0,$$

équation qui détermine les coordonnées u_0 et v_0 des tangentes aux points de rencontre de la courbe et de la directrice.

Tout revient à écrire que cette équation a mêmes racines que l'équation

$$u_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0 \cos\theta = 0.$$

L'équation précédente, développée, s'écrit

$$a u_0^2 f'^2_w + a' v_0^2 f'^2_w + a''(u_0 f'_u + v_0 f'_v)^2 - 2b v_0 f'_w (u_0 f'_u + v_0 f_v)$$
$$- 2b' u_0 f'_w (u_0 f'_u + v_0 f'_v) + 2b'' u_0 v_0 f'^2_w = 0.$$

On aura donc

$$a'' f'^2_u - 2b' f'_u f'_w + a f'^2_w = \frac{a'' f'_u f'_v - b f'_u f'_w - b' f'_v f'_w + b'' f'^2_w}{-\cos\theta}$$
$$= a'' f'^2_v - 2b f'_v f'_w + a' f'^2_w.$$

Ces équations déterminent les coordonnées des directrices.

Elles peuvent s'obtenir plus rapidement en remplaçant dans les équations (1) qui donnent les foyers, x et y par $\frac{f'_u}{f'_w}$ et $\frac{f'_v}{f'_w}$, puisque toute directrice est polaire d'un foyer.

157. Cherchons l'équation de la directrice de la parabole, les axes de coordonnées étant rectangulaires.

On aura pour déterminer les coordonnées de cette droite les équations

$$-2b'f'_u + 2bf'_v + (a-a')f'_w = 0,$$
$$-bf'_u - b'f'_v + b''f'_w = 0;$$

en remplaçant les dérivées par leurs valeurs développées, on obtient

$$u[-(a+a')b' + 2bb''] + v[b(a+a') - 2b'b''] + 2w(b^2 - b'^2) = 0,$$
$$abu + a'b'v + 2bb'w = 0.$$

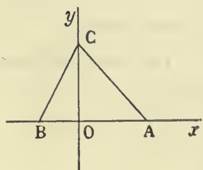
En résolvant ces équations et en supprimant le facteur Δ, on obtient

$$\frac{u}{2b'} = \frac{v}{2b} = \frac{w}{-(a+a')}.$$

L'équation de la directrice est donc

$$2b'x + 2by - (a+a') = 0.$$

158. Théorème de Steiner. — *Si un triangle est circonscrit à une parabole, le point de concours des hauteurs est sur la directrice.*



Prenons pour axes un côté AB du triangle et la hauteur issue du sommet opposé C.

Soient α et β les abscisses des points A et B, γ l'ordonnée du point C; les droites AC et CB ont pour équations

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\gamma} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{\beta} + \frac{y}{\gamma} - 1 = 0.$$

L'équation d'une parabole inscrite dans le triangle ABC sera de la forme

$$au^2 + a'v^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

avec les conditions

$$a' = 0,$$
$$\frac{a}{\alpha^2} - \frac{2b}{\gamma} - \frac{2b'}{\alpha} + \frac{2b''}{\alpha\gamma} = 0,$$

$$\frac{a}{\beta^2}-\frac{2b}{\gamma}-\frac{2b'}{\beta}+\frac{2b''}{\beta\gamma}=0.$$

Multiplions les deux dernières respectivement par α et β, puis retranchons membre à membre ; on obtient

$$\frac{a}{2b}=-\frac{\alpha\beta}{\gamma},$$

ce qui prouve que la directrice qui a pour équation

$$2b'x+2by-a=0$$

passe par le point $\left(0,\ -\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$, c'est-à-dire par le point de concours des hauteurs du triangle ABC.

On trouverait sans difficulté à l'aide des mêmes équations que le lieu des foyers est le cercle circonscrit au triangle ABC.

159. On peut trouver par un procédé plus rapide l'équation de la directrice de la parabole, en considérant cette droite comme le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à la courbe.

On sait que ce lieu est un cercle, appelé *cercle orthoptique*, quand la conique est à centre, et la directrice quand la conique est une parabole.

Soit

$$f(u,\ v,\ w)=0$$

l'équation tangentielle de la conique.

L'équation aux coefficients angulaires des tangentes menées par le point $(x,\ y)$ à la conique est (147)

$$m^2(a''x^2-2b'x+a)-2m(a''xy-bx-b'y+b'')+a''y^2-2by+a'=0.$$

Pour que ces tangentes soient perpendiculaires, il faut qu'on ait

$$a''x^2-2b'x+a+a''y^2-2by+a'+2(a''xy-bx-b'y+b'')\cos\theta=0$$

ou

$$a''(x^2+2xy\cos\theta+y^2)-2x(b'+b\cos\theta)-2y(b+b'\cos\theta)$$
$$+a+a'+2b''\cos\theta=0,$$

équation d'un cercle, si $a''\neq 0$.

Dans le cas où $a''=0$, cette équation représente une droite, qui est la directrice de la parabole,

$$2x(b' + b \cos \theta) + 2y(b + b' \cos \theta) - (a + a' + 2b'' \cos \theta) = 0.$$

Si les axes de coordonnées sont perpendiculaires, l'équation du cercle orthoptique est

$$a''(x^2 + y^2) - 2b'x - 2by + a + a' = 0,$$

et celle de la directrice

$$2b'x + 2by - (a + a') = 0.$$

160. Nous n'insisterons pas ici sur les propriétés connues des foyers et des directrices dans les coniques, propriétés qui s'établissent pour la plupart à l'aide des formes réduites.

Nous terminerons ce chapitre en cherchant l'équation tangentielle d'une conique qui a pour foyer le point (α, β), pour directrice la droite

$$u_0 x + v_0 y + w_0 = 0,$$

et pour excentricité e, les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires.

L'équation ponctuelle de cette conique est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \frac{e^2(u_0 x + v_0 y + w_0)^2}{u_0^2 + v_0^2} = 0.$$

Nous nous appuierons sur ce que les projections du foyer sur les tangentes sont situées sur un cercle bitangent à la conique, la corde des contacts étant l'axe perpendiculaire à la directrice. L'équation de ce cercle est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 - \frac{e^2(u_0x+v_0y+w_0)^2}{u_0^2+v_0^2} - \frac{e^2[v_0(x-\alpha)-u_0(y-\beta)]^2}{u_0^2+v_0^2} = 0$$

ou

$$(u_0^2 + v_0^2)[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] - e^2(u_0 x + v_0 y + w_0)^2$$
$$- e^2[v_0(x - \alpha) - u_0(y - \beta)]^2 = 0.$$

Soit une tangente quelconque à la conique

$$ux + vy + w = 0\,;$$

les coordonnées de la projection du foyer sur cette tangente sont

$$x = \alpha - \frac{u\alpha + v\beta + w}{u^2 + v^2} \cdot u,$$

$$y = \beta - \frac{u\alpha + v\beta + w}{u^2 + v^2} \cdot v:$$

en écrivant que ce point est sur le cercle, on a l'équation demandée.

On trouve ainsi

$$\frac{(u_0^2+v_0^2)(u\alpha+v\beta+w)^2}{u^2+v^2} - e^2\left[u_0\alpha+v_0\beta+w_0 - \frac{(u\alpha+v\beta+w)(uu_0+vv_0)}{u^2+v^2}\right]^2$$
$$- e^2(uv_0-vu_0)^2\frac{(u\alpha+v\beta+w)^2}{(u^2+v^2)^2} = 0$$

ou, en chassant le dénominateur $u^2 + v^2$ et divisant par e^2,

$$\frac{(u_0^2+v_0^2)(u\alpha+v\beta+w)^2}{e^2} - (u_0\alpha+v_0\beta+w_0)^2(u^2+v^2) - (u\alpha+v\beta+w)^2(u_0^2+v_0^2)$$
$$+2(u\alpha+v\beta+w)(u_0\alpha+v_0\beta+w_0)(uu_0+vv_0) = 0 \quad (4)$$

ou encore

$$[u(u_0\alpha + v_0\beta + w_0) - u_0(u\alpha + v\beta + w)]^2$$
$$+ [v(u_0\alpha + v_0\beta + w_0) - v_0(u\alpha + v\beta + w)]^2$$
$$- \frac{(u_0^2 + v_0^2)(u\alpha + v\beta + w)^2}{e^2} = 0$$

ou bien

$$[(uv_0 - vu_0)\alpha - (vw_0 - wv_0)]^2 + [(uv_0 - vu_0)\beta - (wu_0 - uw_0)]^2$$
$$- \frac{(u_0^2 + v_0^2)(u\alpha + v\beta + w)^2}{e^2} = 0.$$

Si le foyer est à l'origine, cette équation devient

$$(vw_0 - wv_0)^2 + (wu_0 - uw_0)^2 - \frac{(u_0^2 + v_0^2)w^2}{e^2} = 0.$$

161. Ces résultats peuvent s'obtenir à l'aide du principe de dualité (50 et suivants).

Les points cycliques correspondent aux droites isotropes passant par l'origine, de telle sorte qu'à un cercle correspond une conique ayant pour foyer le point O ; de plus, au centre du cercle, pôle de

la droite de l'infini, correspondra la polaire du foyer, c'est-à-dire la directrice.

L'équation d'un cercle peut s'écrire

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 - R^2 z^2 = 0;$$

la courbe correspondante aura donc pour équation tangentielle

$$(u - aw)^2 + (v - bw)^2 - R^2 w^2 = 0.$$

Si u_0, v_0, w_0 désignent les coordonnées de la directrice, on aura, en vertu de la dernière remarque,

$$a = \frac{u_0}{w_0}, \qquad b = \frac{v_0}{w_0},$$

de telle sorte que l'équation générale des coniques ayant pour foyer l'origine et pour directrice la droite (u_0, v_0, w_0) est

$$(uw_0 - wu_0)^2 + (vw_0 - wv_0)^2 - R^2 w^2 w_0^2 = 0.$$

D'autre part, on sait que l'excentricité est égale au quotient de la distance de l'origine au centre du cercle par le rayon ; donc

$$e^2 = \frac{u_0^2 + v_0^2}{R^2 w_0^2};$$

on en tire

$$R^2 = \frac{u_0^2 + v_0^2}{e^2 w_0^2},$$

et l'équation précédente s'écrit

$$(uw_0 - wu_0)^2 + (vw_0 - wv_0)^2 - \frac{(u_0^2 + v_0^2) w^2}{e^2} = 0.$$

Si l'on suppose maintenant que le foyer n'est plus à l'origine, mais a pour coordonnées α et β, on transportera l'origine des coordonnées au point $(-\alpha, -\beta)$; il suffira de remplacer dans l'équation précédente w par $u\alpha + v\beta + w$ et w_0 par $u_0\alpha + v_0\beta + w_0$, si l'on veut que la directrice ait encore pour équation

$$u_0 x + v_0 y + w_0 = 0$$

dans le nouveau système d'axes.

On obtient alors l'équation trouvée plus haut,

$$[(uv_0 - vu_0)\alpha - (vw_0 - wv_0)]^2 + [(uv_0 - vu_0)\beta - (wu_0 - uw_0)]^2 - \frac{(u_0^2 + v_0^2)(u\alpha + v\beta + w)^2}{e^2} = 0.$$

162. Dans le cas de la parabole, on a $e = 1$, et l'équation (4) du numéro 160 devient

$$(u^2 + v^2)(u_0\alpha + v_0\beta + w_0) - 2(u\alpha + v\beta + w)(uu_0 + vv_0) = 0.$$

EXERCICES ET NOTES

1. *On considère toutes les paraboles conjuguées par rapport à un triangle ; démontrer que le foyer est sur le cercle des neuf points et que la directrice passe par le centre du cercle circonscrit.*

Prenons pour axes deux côtés du triangle ; l'équation générale des paraboles est (118)

$$u(u\alpha + 2w) + \mu v(v\beta + 2w) = 0.$$

Le foyer est déterminé par les équations (147)

$$-2x + \alpha = \frac{\mu x + y}{\cos\theta} = -2\mu y + \mu\beta.$$

En éliminant μ, on a l'équation du cercle des neuf points.

L'équation de la directrice est (159)

$$2x(1 + \mu\cos\theta) + 2y(\mu + \cos\theta) - (\alpha + \mu\beta) = 0$$

ou

$$2(x + y\cos\theta) - \alpha + \mu[2(x\cos\theta + y) - \beta] = 0\,;$$

elle passe par le point de rencontre des perpendiculaires menées aux milieux des côtés OA et OB.

2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit foyer, est que deux droites conjuguées quelconques passant par ce point soient rectangulaires.*

3. *Enveloppe de la directrice d'une ellipse dont on donne un foyer, l'excentricité et un point.*

L'équation ponctuelle de l'ellipse sera

$$x^2 + y^2 = e^2 \cdot \frac{(ux + vy + w)^2}{u^2 + v^2},$$

en prenant le foyer à l'origine. Écrivons que cette ellipse passe par le point donné $(a, 0)$; on a

$$a^2(u^2 + v^2) - e^2(ua + w)^2 = 0,$$

équation qui représente un cercle ayant pour centre le point donné et pour rayon $\frac{a}{e}\cdot$

4. *On donne une parabole P et une de ses tangentes t dont le point de contact est A. Par les différents points de t on élève des*

perpendiculaires aux tangentes à P *menées par ces points, autres que* t. *Ces tangentes enveloppent une seconde parabole* P′, *tangente à* t *en un point* B. *Les paraboles* P *et* P′ *ont même foyer, leurs axes sont perpendiculaires, la directrice de* P *passe par* B, *la directrice de* P′ *passe par* A.

5. *Lieu des foyers des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés. Séparer sur le lieu trouvé les foyers des ellipses et des hyperboles.*

6. *D'un point pris sur une strophoïde droite, on mène les deux tangentes à la courbe, autres que la tangente au point considéré. Démontrer que la corde des contacts enveloppe une parabole ayant même axe et même sommet que la strophoïde, et son foyer symétrique du point double par rapport à ce sommet.*

7. *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et un point* A *sur* Ox; *on considère les paraboles tangentes à* Oy *à l'origine et passant par le point* A; *on demande l'enveloppe des axes et des directrices.*

L'équation générale des paraboles tangentes à Oy à l'origine est

$$v^2 + 2bvw + 2b'wu = 0.$$

L'équation des points de rencontre de cette courbe avec Ox est

$$(v + bw)^2 - (v^2 + 2bvw + 2b'wu) = 0$$

ou

$$w(b^2w - 2b'u) = 0,$$

ce qui donne l'origine et le point d'abscisse $-\frac{2b'}{b^2}$; on aura donc, en désignant par α l'abscisse du point A,

$$\alpha = -\frac{2b'}{b^2},$$

et par suite l'équation générale des paraboles sera

$$v^2 + 2bvw - b^2\alpha wu = 0.$$

Il est alors facile de voir que les axes enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements et que les directrices enveloppent une parabole.

8. *Lieu des foyers d'une ellipse de grandeur constante qui se déplace en demeurant tangente à deux droites perpendiculaires.*

9. *Lieu des foyers des paraboles touchant deux droites données et dont la directrice passe par un point donné.*

10. *Le lieu des sommets des paraboles touchant deux droites perpendiculaires, et dont le foyer décrit un cercle qui a ces deux droites pour diamètres, est une hypocycloïde à quatre rebroussements.*

L'équation des paraboles est

$$2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0\ ,$$

avec la condition

$$R^2(b^2 + b'^2) - b''^2 = 0;$$

nous pourrons prendre

$$b = \frac{\cos\varphi}{R}, \qquad b' = \frac{\sin\varphi}{R}, \qquad b'' = 1.$$

Les coordonnées de la tangente au sommet satisfont aux équations

$$2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$
$$bu - b'v = 0\ ;$$

on en déduit aisément les coordonnées du point de contact, et l'on trouve

$$x = R\cos^3\varphi, \qquad y = R\sin^3\varphi.$$

11. *Si une droite fixe rencontre une série de coniques ayant même foyer et même directrice, les tangentes à ces coniques aux points où elles rencontrent la droite fixe enveloppent une conique qui a même foyer que les proposées, et qui touche à la fois leur directrice et la droite fixe. Cas où la droite est à l'infini.*

12. *Si on coupe deux tangentes à la parabole par une perpendiculaire à l'axe, et qu'aux points* B *et* C *où elle les rencontre on élève des perpendiculaires à ces tangentes, la droite* AD *qui joint le point de concours* D *de ces perpendiculaires au point de concours* A *des tangentes passe par le foyer.*

13. *Lieu des foyers des coniques tangentes à deux côtés d'un triangle et aux hauteurs correspondantes.*

14. *Lieu des foyers des paraboles dont les directrices passent par un point fixe et qui touchent deux droites données.*

Le lieu est un cercle circonscrit au triangle qui a pour côtés les deux droites et pour point de concours des hauteurs le point donné.

15. *Si d'un point* P *pris sur une normale fixe à une conique on mène les trois autres normales, les trois côtés du triangle formé par les pieds enveloppent une parabole tangente aux axes de la conique,*

et dont le foyer est la projection du centre sur la tangente au point diamétralement opposé au pied de la normale fixe.

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation de la conique donnée. Désignons par $ux+vy+w=0$ une des droites dont on cherche l'enveloppe; les normales aux points de rencontre de cette droite se coupent en un point par lequel on peut mener deux autres normales, et la droite qui joint leurs deux pieds a pour pôle le point $-\frac{a^2}{\alpha}$, $-\frac{b^2}{\beta}$, α et β désignant les coordonnées du pôle de la droite $ux+vy+w=0$, en vertu des formules bien connues de Joachimsthal. Or le pôle de cette droite ayant pour coordonnées $-\frac{a^2u}{w}$ et $-\frac{b^2v}{w}$, les coordonnées du pôle de la deuxième droite seront $\frac{w}{u}$ et $\frac{w}{v}$. Il suffit alors d'écrire que ce pôle est sur la tangente au pied (x_1, y_1) de la normale fixe, ce qui donne

$$b^2x_1vw+a^2y_1wu-a^2b^2uv=0,$$

équation tangentielle d'une parabole tangente aux deux axes. Le foyer est déterminé par les deux équations

$$a^2y_1x-b^2x_1y=0,$$
$$b^2xx_1+a^2yy_1+a^2b^2=0,$$

ce qui démontre le théorème.

16. *Lieu des foyers des coniques ayant même directrice et touchant deux droites.*

17. *Enveloppe des droites coupant deux cercles suivant des cordes égales.*

18. *Enveloppe de la directrice d'une conique ayant un foyer fixe, passant par un point et touchant une droite.*

19. *Une parabole étant inscrite dans un angle donné, si la direction des diamètres est donnée, le lieu des foyers est une droite.*

20. *Lieu des sommets des paraboles qui, homofocales à une parabole donnée, sont tangentes à deux normales rectangulaires à cette courbe.*

Le lieu est un cercle passant par le foyer fixe, et l'autre extrémité

du diamètre passant par ce point est le symétrique du sommet de la parabole donnée relativement à son foyer.

21. *On donne trois coniques ayant un foyer* F *commun. Démontrer que l'enveloppe des droites telles que leurs pôles par rapport à ces trois coniques soient en ligne droite, est une conique ayant un de ses foyers en* F.

22. *On donne un point et une droite, et l'on considère les coniques qui ont le point pour centre et la droite pour directrice. Démontrer qu'il existe deux de ces coniques tangentes à une droite quelconque du plan, et trouver comment doit être placée la droite pour que les deux coniques qui lui sont tangentes soient réelles.*

Prenons le centre à l'origine, et soit $x - \alpha = 0$ l'équation de la directrice. On trouve aisément que l'équation générale des coniques est

$$\frac{\lambda^2 v^2}{\alpha^2} - \lambda(u^2 + v^2) + w^2 = 0.$$

En écrivant que cette conique est tangente à une droite quelconque (u, v, w), on a une équation du deuxième degré par rapport à λ, qui détermine deux coniques.

Écrivons que l'équation en λ a ses racines réelles ; on a

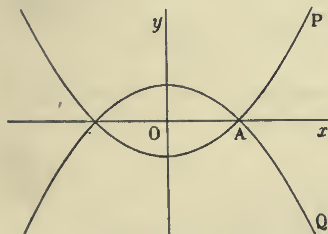
$$(u^2 + v^2)^2 - 4\frac{v^2 w^2}{\alpha^2} > 0$$

$$[\alpha(u^2 + v^2) + 2vw][\alpha(u^2 + v^2) - 2vw] > 0. \qquad (1)$$

Or l'équation

$$\alpha(u^2 + v^2) - 2vw = 0$$

représente une parabole P ayant pour foyer l'origine, pour axe Oy et pour tangente au sommet $y + \frac{\alpha}{2} = 0$; par suite cette parabole passe par le point A $(\alpha, 0)$.



L'équation $\alpha(u^2+v^2)+2vw=0$ représente également une parabole symétrique de la première par rapport à Ox.

Nous avons obtenu au numéro 84 l'interprétation géométrique du signe du premier membre de l'équation tangentielle d'une conique. Remarquons ici que les discriminants des premiers membres des équations des paraboles sont égaux ; il en résulte que la

condition (1) exprime que la droite (u, v, w) rencontre les deux paraboles toutes deux en des points réels ou toutes deux en des points imaginaires. Mais on voit sans peine (analytiquement et géométriquement) qu'une droite ne peut rencontrer à la fois les deux paraboles en des points imaginaires.

Il en résulte que pour qu'il existe deux coniques réelles tangentes à une droite du plan, il faut que cette droite rencontre les deux paraboles en des points réels.

23. *Lieu des foyers des paraboles qui touchent deux droites données et dont l'axe passe par un point donné.*

24. **Foyers dans les courbes quelconques.** — On appelle foyer d'une courbe quelconque un point tel que parmi les tangentes issues de ce point à la courbe, il y en ait deux passant par les points cycliques.

Si la courbe est de classe n, par chaque point cyclique on peut lui mener n tangentes; les tangentes issues de l'un des points rencontrent en n^2 points les tangentes issues de l'autre ; la courbe a donc n^2 foyers, dont n seulement sont réels. Cette conclusion n'est exacte que si la droite de l'infini n'est pas tangente à la courbe ; dans ce cas le nombre des foyers se réduit.

Si la courbe passe par les points cycliques, c'est-à-dire est circulaire, le point de rencontre des tangentes aux points cycliques est ce qu'on appelle un foyer singulier.

On détermine aisément les foyers d'une courbe définie par son équation tangentielle $f(u, v, w) = 0$. On cherche l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues d'un point (x, y), c'est-à-dire

$$f(m, \ -1, \ y - mx) = 0,$$

et on écrit que cette équation admet les racines $\pm i$ (les axes de coordonnées étant rectangulaires).

25. *Tout foyer d'une courbe est foyer de sa développée.*

26. *Démontrer que l'équation tangentielle générale des courbes de* n^e *classe admettant pour foyers les* n *points*

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0, \ldots \qquad \alpha_n = 0$$

est

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + \omega\omega'\varphi = 0,$$

$\omega = 0$, $\omega' = 0$ *étant les équations des points cycliques et* φ *une fonction de degré* $n - 2$ *par rapport à* u, v, w.

(SALMON, Courbes planes.)

27. *Le lieu d'un point tel que les tangentes menées de ce point à une courbe de classe n fassent avec une droite fixe des angles dont la somme soit constante, est une courbe de degré n qui passe par les foyers de la courbe donnée.*

28. *Déterminer le foyer singulier de la cissoïde de Dioclès.*

29. *Si l'on donne $2n-1$ tangentes d'une courbe de classe n, et si la droite de l'infini est tangente multiple d'ordre $n-1$, le lieu des foyers est un cercle.*

L'équation tangentielle des courbes pour lesquelles la droite de l'infini est tangente multiple d'ordre $n-1$ est

$$\varphi_n(u, v)+w\varphi_{n-1}(u, v)=0,$$

les fonctions φ étant homogènes et de degré indiqué par l'indice (Chapitre II. Exercice 12).

L'équation renferme $2n+1$ coefficients ; écrivons que cette courbe est tangente à $2n-1$ droites ; il ne restera plus que deux coefficients variables, c'est-à-dire un seul paramètre linéaire. On peut donc supposer que les coefficients de l'équation précédente sont fonctions linéaires d'un paramètre.

Il est alors aisé de trouver le lieu du foyer.

Appliquer à la parabole et aux courbes de troisième classe pour lesquelles la droite de l'infini est tangente double.

30. *Une parabole dont le foyer est* F *est tangente aux deux côtés d'un angle droit* yOx *; on élève au point* O *une perpendiculaire à la droite* OF *; cette perpendiculaire rencontre la tangente au sommet de la parabole en un point* F′. *On demande de faire voir : 1° que la droite* FF′ *est tangente en* F *à la courbe décrite par ce point, lorsque la parabole glisse sur son plan en restant tangente aux côtés de l'angle droit* yOx *; 2° que la tangente* F′C *à la courbe décrite par le point* F′ *rencontre la droite* OF *en un point* C *tel que* OF = 4OC.

CHAPITRE X

TANGENTES COMMUNES A DEUX CONIQUES

163. Considérons deux coniques ayant pour équations tangentielles

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

$$f_1(u, v, w) = a_1u^2 + a_1'v^2 + a_1''w^2 + 2b_1vw + 2b_1'wu + 2b_1''uv = 0.$$

Les coordonnées des tangentes communes aux deux coniques sont les solutions communes à ces deux équations ; ces tangentes seront donc déterminées en résolvant le système formé par les équations tangentielles des deux coniques.

Supposons que l'axe des y ne soit pas tangent à l'une des coniques, les coefficients a et a_1 ne sont pas nuls ; ordonnons les équations précédentes par rapport à u ; elles peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} u^2 + Pu + Q = 0, \\ u^2 + P_1u + Q_1 = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$P = \frac{2(b''v + b'w)}{a}, \qquad P_1 = \frac{2(b_1''v + b_1'w)}{a_1},$$

$$Q = \frac{a'v^2 + a''w^2 + 2bvw}{a}, \qquad Q_1 = \frac{a'v^2 + a_1''w^2 + 2b_1vw}{a_1}.$$

Éliminons u entre les équations (1) ; on obtient

$$R(v, w) = (Q_1 - Q)^2 - (P_1 - P)(PQ_1 - QP_1) = 0. \qquad (2)$$

Cette équation est homogène et du quatrième degré par rapport à v et w; pour toute solution (v_0, w_0) de cette équation, les équations (1) ont une racine commune u_0. L'ensemble de valeurs u_0, v_0, w_0 constitue alors un système de solutions communes aux équations tangentielles des deux coniques ; par suite la droite

$$u_0x + v_0y + w_0z = 0$$

est tangente à la fois aux deux coniques.

$R(v, w)$ est décomposable en un produit de quatre facteurs linéaires ; soit $v\alpha + w\beta$ l'un d'eux ; à ce facteur correspond la solution

$$v_0 = \beta, \qquad w_0 = -\alpha$$

de l'équation (2), et pour avoir la valeur de u correspondante, deux cas sont à examiner.

1° Supposons que ces valeurs v_0 et w_0 mises à la place de v et de w dans P et P_1 n'annulent pas $P_1 - P$; on sait alors que les deux équations (1) ont *une seule* racine commune, qui est donnée par

$$u_0 = -\frac{Q_1 - Q}{P_1 - P},$$

en remplaçant dans le second membre v et w par v_0 et w_0.

Dans ce cas, au facteur $v\alpha + w\beta$ du résultant $R(v, w)$ correspond *une seule* tangente commune aux deux coniques.

2° Si au contraire les valeurs v_0 et w_0 annulent $P_1 - P$, elles annulent aussi $Q_1 - Q$ d'après l'équation (2); si on remplace alors v et w par v_0 et w_0 dans les équations (1), ces équations sont identiques, elles admettent deux racines communes u_0 et u'_0; par suite les deux coniques ont deux tangentes communes,

$$u_0x + v_0y + w_0z = 0,$$
$$u'_0x + v_0y + w_0z = 0,$$

et ces deux tangentes se coupent sur l'axe des y.

Dans ce cas, au facteur du résultant correspondent *deux* tangentes communes se coupant sur l'axe des y.

164. Il est important de remarquer que dans cette dernière hypothèse le facteur $\alpha v + \beta w$ est facteur double de $R(v, w)$.

En effet, puisque les valeurs $v = \beta$ et $w = -\alpha$ annulent $P_1 - P$ et $Q_1 - Q$, ces fonctions sont divisibles par $\alpha v + \beta w$, et l'on peut écrire

$$P_1 - P \equiv p(\alpha v + \beta w),$$

$$Q_1 - Q \equiv q(\alpha v + \beta w),$$

p étant une constante et q une fonction linéaire.

On en déduit

$$PQ_1 - QP_1 \equiv (Pq - Qp)(\alpha v + \beta w)$$

et aussi

$$R(v, w) \equiv (\alpha v + \beta w)^2[q^2 - p(Pq - Qp)],$$

ce qui démontre la proposition.

La réciproque n'est pas vraie, il peut arriver qu'un facteur double de $R(v, w)$ ne divise pas $P_1 - P$.

165. Dans la pratique, pour résoudre l'équation (2), on opère comme s'il n'y avait qu'une seule inconnue. On commence par supprimer le facteur w, s'il existe, puis on résout l'équation par rapport à $\frac{v}{w}$; c'est une équation à une seule inconnue qui peut admettre des racines réelles ou des racines imaginaires conjuguées deux à deux. Si l'on a, par exemple, la solution $\frac{v}{w} = h$, on pourra prendre pour valeurs de v et de w, $v = h$ et $w = 1$.

Si h est imaginaire, la tangente correspondante est imaginaire; si h est réel, il faut encore pour que la tangente soit réelle que la valeur correspondante de u soit réelle; cela arrivera toujours si le système $(v = h,\ w = 1)$ n'annule pas $P_1 - P$; mais si ce système annule $P_1 - P$, on a deux valeurs de u correspondantes, racines d'une équation du second degré, et ces deux valeurs ne sont pas toujours réelles.

Dans tout ce qui suivra, nous appellerons racines de l'équation (2) les valeurs de $\frac{v}{w}$; dans le cas où $R(v, w)$ admet-

trait le facteur w, il faudrait aussi considérer comme racine réelle la valeur $w = 0$, v étant arbitraire.

166. Discussion. — PREMIER CAS. — *L'équation* (2) *a quatre racines simples.*

D'après ce que nous avons vu plus haut (164), aucune de ces racines ne peut annuler $P_1 - P$; à chaque racine de l'équation (2) correspond une seule valeur de u.

Les deux équations (1) ont donc quatre systèmes distincts de solutions communes, les deux coniques admettent quatre tangentes communes différentes.

Pour qu'une tangente commune soit réelle, il faut et il suffit que la racine correspondante de l'équation (2) soit réelle, puisqu'à cette racine ne correspond qu'une valeur de u; il résulte de là que les deux coniques admettront : ou bien quatre tangentes communes réelles, ou bien deux réelles et deux imaginaires conjuguées, ou bien quatre tangentes imaginaires conjuguées deux à deux.

167. DEUXIÈME CAS. — *L'équation* (2) *a une racine double et deux racines simples.*

Aux deux racines simples correspondent deux tangentes communes réelles ou imaginaires conjuguées. Quant à la racine double, il peut se présenter deux cas selon que cette racine annule ou non $P_1 - P$.

1° Si la racine double n'annule pas $P_1 - P$, à cette racine correspond une seule valeur de u, et par suite une seule tangente commune.

On dit quelquefois que cette tangente est double; cela revient à la considérer comme réunion de deux tangentes communes; nous pouvons d'ailleurs justifier cette manière de voir, en démontrant que cette tangente touche les deux coniques au même point.

En effet, puisque l'équation (2) a une racine double, cette racine satisfait aux équations

$$R(v, w) = 0, \qquad R'_v(v, w) = 0.$$

En adjoignant à cette racine la valeur

$$u = -\frac{Q_1 - Q}{P_1 - P},$$

on a les coordonnées de la tangente commune.

Nous allons démontrer que ces coordonnées satisfont aux équations

$$\frac{f'_u}{f'_{1u}} = \frac{f'_v}{f'_{1v}} = \frac{f'_w}{f'_{1w}}.$$

Considérons d'abord la première égalité,

$$\frac{f'_u}{f'_{1u}} = \frac{f'_v}{f'_{1v}};$$

on peut l'écrire

$$\frac{2u + P}{2u + P_1} = \frac{P'u + Q'}{P'_1 u + Q'_1},$$

les accents désignant des dérivées par rapport à v.

En chassant les dénominateurs, on a

$$2u^2(P'_1 - P') + u[2(Q'_1 - Q') + PP'_1 - P_1P'] + PQ'_1 - P_1Q' = 0$$

ou, en remplaçant u par sa valeur $-\frac{Q_1 - Q}{P_1 - P}$,

$$2(Q_1 - Q)^2(P'_1 - P') - (Q_1 - Q)(P_1 - P)[2(Q'_1 - Q') + PP'_1 - P_1P'] \\ + (PQ'_1 - P_1Q')(P_1 - P)^2 = 0. \qquad (3)$$

D'autre part, on a

$$R(v, w) = (Q_1 - Q)^2 - (P_1 - P)(PQ_1 - QP_1) = 0,$$

$$R'_v(v, w) = 2(Q_1 - Q)(Q'_1 - Q') - (P_1 - P')(PQ_1 - QP_1) \\ - (P_1 - P)(PQ'_1 + Q_1P' - QP'_1 - P_1Q') = 0.$$

Multiplions $R'_v(v, w)$ par $P_1 - P$, et ajoutons au produit le premier membre de la relation (3), que nous désignerons par H; on obtient

$$H + (P_1 - P)R'_v(v, w) = 2(Q_1 - Q)^2(P'_1 - P') \\ - (P'_1 - P')(PQ_1 - QP_1)(P_1 - P) - (Q_1 - Q)(P_1 - P)(PP'_1 - P_1P') \\ - (P_1 - P)^2(P'Q_1 - QP'_1).$$

Les deux derniers termes du second membre peuvent se

transformer aisément en l'expression suivante :

$$-(P_1-P)(P'_1-P')(PQ_1-QP_1),$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} H+(P_1-P)R'_v(v, w) \\ = 2(P'_1-P')[(Q_1-Q)^2-(P_1-P)(PQ_1-QP_1)] \end{aligned}$$

ou

$$H+(P_1-P)R'_v(v, w) = 2(P'_1-P')R(v, w).$$

On voit donc que si $R(v, w)$ et $R'_v(v, w)$ sont nuls, il en est de même de H, et par suite la relation (3) est vérifiée.

On établira de même la relation

$$\frac{f'_u}{f'_{1u}} = \frac{f'_w}{f'_{1w}},$$

en remarquant que la racine double du résultant annule aussi $R'_w(v, w)$.

Dans ce cas, les deux coniques sont tangentes et admettent deux tangentes communes réelles ou imaginaires.

2° Si la racine double annule P_1-P, à cette racine correspondent deux valeurs de u données par l'une des équations (1) ; on aura donc deux tangentes communes se coupant sur l'axe des y, ces deux tangentes pouvant être réelles ou imaginaires conjuguées. Dans ce cas, les deux coniques admettent quatre tangentes communes distinctes réelles ou imaginaires.

Il peut arriver que les deux valeurs de u soient égales ; on a alors

$$f'_u = 0, \qquad f'_{1u} = 0,$$

ce qui montre que le point de contact de la tangente unique correspondante est sur l'axe des y ; par conséquent les deux coniques sont tangentes.

168. Troisième cas. — *L'équation* (2) *a deux racines doubles.*

A chaque racine double correspond : ou bien une tangente double touchant les deux coniques au même point, ou bien deux tangentes se coupant sur l'axe Oy.

Les deux coniques pourront donc être : ou bien bitangentes, les tangentes aux points de contact constituant deux tangentes

communes doubles, ou simplement tangentes et admettre deux tangentes simples, ou enfin pourront avoir quatre tangentes communes distinctes se coupant deux à deux sur Oy.

Si les deux racines doubles sont imaginaires conjuguées, les deux coniques seront bitangentes, les points de contact étant imaginaires.

169. QUATRIÈME CAS. — *L'équation* (2) *a une racine triple et une racine simple.*

Ces deux racines sont toujours réelles. A la racine simple correspond une tangente commune ; quant à la racine triple, deux cas sont à distinguer.

1° Si cette racine n'annule pas $P_1 - P$, à cette racine ne correspond qu'une tangente, on dit que c'est une tangente triple, les deux coniques sont tangentes comme dans le cas précédent ; seulement la tangente commune est la réunion de trois tangentes. On dit que les deux coniques ont un contact du deuxième ordre, et nous verrons plus tard que les courbes se traversent.

2° Si la racine triple annule $P_1 - P$, à cette racine correspondent deux valeurs de u et par suite deux tangentes ; l'une d'elles doit compter pour deux, et par suite les deux coniques seront tangentes au même point à l'une de ces droites, comme on peut d'ailleurs le démontrer analytiquement de la manière suivante.

Égalons à zéro la dérivée seconde de $R(v, w)$ par rapport à v ; on obtient, en remarquant que pour la racine triple on a

$$P = P_1, \qquad Q = Q_1,$$

$$(Q_1' - Q')^2 - (P_1' - P')(PQ_1 - QP_1)' = 0. \tag{4}$$

Or pour que le point de contact soit le même, on doit avoir

$$\frac{2u + P}{2u + P_1} = \frac{P'u + Q'}{P_1'u + Q_1'},$$

et comme $P = P_1$, cette condition s'écrit

$$\frac{P'u + Q'}{P_1'u + Q_1'} = 1$$

ou

$$u = -\frac{Q'_1 - Q'}{P'_1 - P'}.$$

Tout revient à démontrer que cette quantité est racine de l'équation

$$u^2 + Pu + Q = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$(Q'_1 - Q')^2 - P(Q'_1 - Q')(P'_1 - P') + Q(P'_1 - P')^2 = 0;$$

ce n'est pas autre chose que la relation (4), où l'on remplace P_1 par P et Q_1 par Q.

Cela nous montre en même temps que les deux valeurs de u sont toujours réelles.

Enfin il peut arriver que ces deux valeurs de u soient égales ; dans ce cas les deux coniques ont un contact du deuxième ordre.

170. Cinquième cas. — *L'équation* (2) *a une racine quadruple.*

1° Si cette racine n'annule pas $P_1 - P$, les deux coniques admettent une tangente commune, dite tangente quadruple, ou réunion de quatre tangentes communes ; cette tangente touche les deux coniques au même point. On dit que les deux courbes ont en ce point un contact du troisième ordre.

2° Si cette racine annule $P_1 - P$, à cette racine correspondent deux valeurs de u ; on a par suite deux tangentes communes, et il sera aisé de vérifier que l'une de ces tangentes touchera les deux coniques au même point et que le contact sera du second ordre, ou bien que les deux coniques seront bitangentes.

Si les deux valeurs de u sont égales, il y aura contact du troisième ordre.

171. Il résulte de cette discussion que deux coniques ont toujours *quatre* tangentes communes réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues.

Si deux tangentes sont confondues, il y a contact ordinaire; si trois tangentes sont confondues, il y a contact du deuxième

ordre ; enfin si les quatre tangentes sont confondues, le contact est du troisième ordre.

Il est clair que l'une de ces tangentes communes peut avoir son point de contact à l'infini, c'est-à-dire être asymptote ; il peut aussi arriver que la droite de l'infini soit tangente commune, ce qui a lieu dans le cas de deux paraboles.

Enfin à une tangente imaginaire correspond toujours une tangente imaginaire conjuguée.

172. Il ne sera pas sans intérêt d'étudier maintenant les différents ordres de contact au point de vue géométrique.

Considérons d'abord deux coniques tangentes, le point de contact étant à distance finie ; nous prendrons ce point pour origine et la tangente commune pour axe des x.

Pour que l'équation

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0$$

représente une conique tangente à Ox, il faut que $a' = 0$; en outre l'équation du point de contact étant

$$\frac{1}{2} f'_v = b''u + bw = 0,$$

pour que ce point de contact soit à l'origine, il faut que $b'' = 0$. On voit alors que a ne peut être nul.

Nous pourrons donc écrire les équations des deux coniques

$$u^2 + 2b'uw + 2bvw + a''w^2 = 0,$$

$$u^2 + 2b'_1uw + 2b_1vw + a''_1w^2 = 0.$$

En éliminant u, on obtient l'équation

$$[2(b_1 - b)v + (a''_1 - a'')w]^2w^2$$
$$- 4(b'_1 - b')[2(b'b_1 - bb'_1)v + (b'a''_1 - a''b'_1)w]w^3 = 0;$$

elle admet la racine double $w = 0$.

Pour que le contact soit du second ordre, il faut que $w = 0$ soit racine triple ; on doit avoir $b - b_1 = 0$.

Enfin pour que le contact soit du troisième ordre, il faut que $w = 0$ soit racine quadruple, ce qui exige

$$b - b_1 = 0, \qquad (b'_1 - b')(b'b_1 - bb'_1) = 0,$$

ce qui donne

$$b - b_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad b' - b'_1 = 0.$$

Nous allons étudier maintenant la position des deux courbes aux environs de l'origine.

Nous opérerons comme nous l'avons vu aux numéros 59 et suivants.

Nous poserons $v = -1$ et nous développerons u en série ordonnée suivant les puissances croissantes de w. Pour le faire aisément, nous pouvons résoudre l'équation de la conique par rapport à u ; on a

$$u = -b'w \pm \sqrt{b'^2w^2 - a''w^2 + 2bw},$$

qu'on peut écrire

$$u = -b'w \pm \sqrt{2bw}\left[1 + \frac{(b'^2 - a'')w}{2b}\right]^{\frac{1}{2}},$$

et par suite, en développant en série le coefficient de $\sqrt{2bw}$,

$$u = -b'w \pm \sqrt{2bw}\left[1 + \frac{b'^2 - a''}{4b}w + \cdots\right]$$

ou

$$u = \varepsilon\sqrt{2bw} - b'w + \varepsilon w\sqrt{2bw}\cdot\frac{b'^2 - a''}{4b} + \cdots, \qquad (5)$$

ε désignant ± 1.

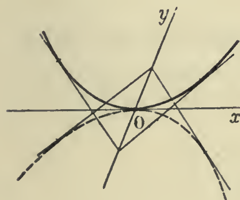
On aura de même pour la deuxième conique

$$u_1 = \varepsilon\sqrt{2b_1w} - b'_1w + \varepsilon w\sqrt{2b_1w}\,\frac{b_1'^2 - a''_1}{4b_1} + \cdots \qquad (6)$$

Dans l'équation (5) on ne peut donner à w que des valeurs du signe de b, et dans l'équation (6) w ne peut être que du signe de b_1.

PREMIER CAS. $b \neq b_1$. *Contact du premier ordre.*

Tout d'abord si b et b_1 sont de signes contraires, w reçoit des valeurs de signes contraires dans les relations (5) et (6) ; il en résulte que les deux courbes sont situées de part et d'autre de Ox.



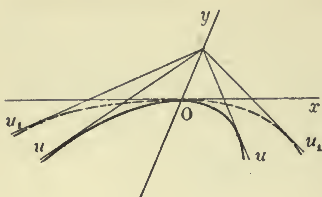
Supposons maintenant b et b_1 de même signe, et positifs pour fixer les idées ; w ne pourra recevoir que des valeurs positives ; chacune des équations (5) et (6) détermine pour u deux valeurs infiniment petites de signes contraires ; nous comparerons les valeurs positives et les valeurs négatives.

En retranchant les équations (5) et (6) on a

$$u - u_1 = \varepsilon\sqrt{w}\left[\sqrt{2b} - \sqrt{2b_1}\right] + (b'_1 - b')w + \cdots ;$$

le premier membre a le signe de $(\sqrt{2b} - \sqrt{2b_1})\varepsilon$.

Supposons $b > b_1$ et prenons $\varepsilon = +1$; $u - u_1$ sera posi-



tif; au contraire pour $\varepsilon = -1$, $u - u_1$ change de signe et devient négatif; ce qui montre que u est toujours supérieur à u_1 en valeur absolue.

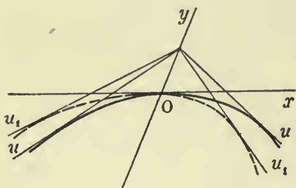
On voit ainsi que les deux courbes ne se traversent pas.

Deuxième cas. $b = b_1$. $b' \neq b'_1$. *Contact du second ordre.*

En retranchant les équations (5) et (6) on obtient

$$u - u_1 = (b'_1 - b')\,w + \ldots..$$

Supposons $b > 0$; w recevra des valeurs positives; on voit que $u - u_1$ aura un signe constant, celui de $b'_1 - b'$. Supposons encore $b'_1 - b' > 0$.



Si ε est positif, u et u_1 sont positifs et l'on a $u > u_1$; si ε est négatif, u et u_1 seront négatifs, mais u sera plus petit que u_1 en valeur absolue. On voit ainsi que les courbes se traversent et sont toujours d'un même côté de Ox.

Troisième cas. $b = b_1$. $b' = b'_1$. *Contact du troisième ordre.* On a cette fois

$$u - u_1 = \varepsilon w\sqrt{2bw}\left[\frac{a''_1 - a''}{4b}\right] + \cdots.$$

$u - u_1$ change de signe avec ε; donc en supposant $b > 0$, u est toujours supérieur à u_1 en valeur absolue; les deux courbes ne se traversent pas et sont toujours d'un même côté de Ox.

173. Supposons maintenant que le point de contact soit à l'infini, c'est-à-dire que les deux coniques aient une asymptote commune; si nous la prenons pour axe Ox, les équations des coniques s'écrivent

$$u^2 + 2b'uw + 2b''uv + a''w^2 = 0,$$

$$u^2 + 2b'_1uw + 2b''_1uv + a''_1w^2 = 0.$$

En éliminant u on obtient

$$(a''_1 - a'')^2w^4$$
$$- 4[(b''_1 - b'')v + (b'_1 - b')w][(a''_1b'' - a''b''_1)v + (a''_1b' - a''b'_1)w]w^2 = 0.$$

Cette équation admet la racine double $w = 0$.

Pour que le contact soit du deuxième ordre, il faut que le coeffi-

cient de v^2w^2 soit nul, ce qui donne la condition

$$(b_1'' - b'')(a_1''b'' - a''b_1'') = 0.$$

Si $b_1'' - b'' = 0$, à la racine $w = 0$ correspondent deux valeurs de u inégales, et par conséquent il n'y a pas contact du second ordre.

On doit donc avoir

$$a_1''b'' - a''b_1'' = 0$$

ou

$$\frac{b''}{a''} = \frac{b_1''}{a_1''}.$$

On voit en effet aisément que a'' et a_1'' ne peuvent être nuls.

Pour que le contact soit du troisième ordre, il faut que le coefficient de vw^3 soit nul, ce qui donne

$$(b_1'' - b'')(a_1''b' - a''b_1') = 0$$

et, comme plus haut,

$$\frac{b'}{a''} = \frac{b_1'}{a_1''}.$$

Nous allons poser encore $v = -1$, et développer en série u par rapport aux puissances croissantes de w. Nous n'aurons qu'une seule valeur de u infiniment petite en même temps que w.

En résolvant l'équation de la conique par rapport à u, il vient

$$u = b'' - b'w \pm \sqrt{(b'' - b'w)^2 - a''w^2},$$

$$u = b'' - b'w \pm \sqrt{b''^2 - 2b''b'w + (b'^2 - a'')w^2},$$

et la valeur de u, infiniment petite avec w, sera

$$u = b'' - b'w - b''\left[1 - \frac{2b'}{b''}w + \frac{b'^2 - a''}{b''^2}w^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

en remarquant que b'' ne peut être nul.

Développons en série le coefficient de b'' ; on obtient

$$u = b'' - b'w - b''\left[1 - \frac{b'}{b''}w - \frac{a''}{2b''^2}w^2 - \frac{a''b'}{2b''^3}w^3 + \cdots\right]$$

ou

$$u = \frac{a''}{2b''}w^2 + \frac{a''b'}{2b''^2}w^3 + \cdots$$

On aura de même pour la deuxième courbe

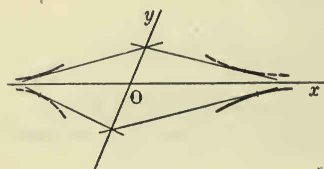
$$u_1 = \frac{a_1''}{2b_1''}w^2 + \frac{a_1''b_1'}{2b_1''^2}w^3 + \cdots$$

Ces développements permettront de déterminer la position de chaque courbe par rapport à l'asymptote, comme on l'a vu au numéro 64.

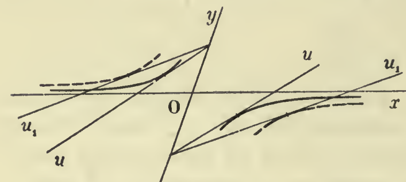
Pour avoir la position relative des deux courbes, retranchons les équations précédentes ; nous avons

$$u - u_1 = \left(\frac{a''}{2b''} - \frac{a''_1}{2b''_1}\right)w^2 + \left(\frac{a''b'}{2b''^2} - \frac{a''_1 b'_1}{2b''^2_1}\right)w^3 + \cdots$$

Premier cas. $\frac{a''}{b''} \neq \frac{a''_1}{b''_1}$. *Contact du premier ordre.*



$u - u_1$ a un signe constant quel que soit w. Supposons d'abord $\frac{a''}{b''}$ et $\frac{a''_1}{b''_1}$ de signes contraires, par exemple $\frac{a''}{b''} > 0$ et $\frac{a''_1}{b''_1} < 0$; u est toujours positif et u_1 toujours négatif.



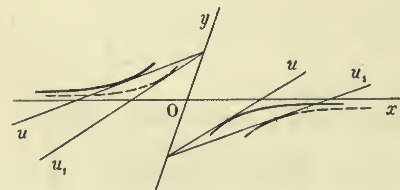
Supposons maintenant $\frac{a''}{b''}$ et $\frac{a''_1}{b_1}$ de même signe, positifs par exemple, et de plus

$$\frac{a''}{b''} - \frac{a''_1}{b''_1} > 0.$$

Il en résulte que u, u_1 et la différence $u - u_1$ sont positifs.

Il est alors facile de construire la courbe.

Deuxième cas. $\frac{a''}{b''} = \frac{a''_1}{b''_1}$. $\frac{b'}{a''} \neq \frac{b'_1}{a''_1}$. *Contact du deuxième ordre.*



On voit alors que dans la différence $u - u_1$, le coefficient de w^2 est nul, mais celui de w^3 est différent de zéro.

u et u_1 sont de même signe, supposons-les positifs ; quant à la différence $u - u_1$, elle change de signe avec w, ce qui permet de construire la courbe.

Le produit des carrés des longueurs géométriques des axes est, au signe près, (136), $\frac{\Delta \sin^2 \theta}{a''^3}$.

Si l'équation de la conique est

$$u^2 + a''w^2 + 2b'uw + 2b''uv = 0$$

ce produit se réduit à $-\frac{b''^2}{a''^2}\sin^2\theta$.

Il en résulte que si deux hyperboles ont une asymptote commune et un contact du deuxième ordre, le produit des longueurs géométriques des axes est le même pour les deux courbes, et la réciproque est vraie.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux hyperboles qui ont une asymptote commune aient un contact du deuxième ordre sur cette asymptote est que les rectangles construits sur les axes aient même aire dans les deux courbes.

TROISIÈME CAS. $\frac{a''}{b''} = \frac{a''_1}{b''_1}\cdot\quad \frac{b'}{a''} = \frac{b'_1}{a''_1}\cdot$ *Contact du troisième ordre.*

$u - u_1$ est infiniment petit du quatrième ordre et a un signe constant quel que soit w ; de plus u et u_1 ont le même signe, on a donc la même forme de courbe que dans la seconde hypothèse du premier cas.

Mais on peut remarquer que les deux coniques ont même centre, et que les rectangles construits sur les axes ont même aire.

On a donc le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux hyperboles qui ont une asymptote commune aient un contact du troisième ordre est qu'elles aient même centre et que les rectangles construits sur les axes dans les deux courbes aient même aire.

174. Pour terminer cette discussion, nous allons considérer deux coniques tangentes à la droite de l'infini au même point, c'est-à-dire deux paraboles ayant leurs axes parallèles, et nous chercherons la condition pour que ces courbes aient à l'infini un contact du deuxième ou troisième ordre.

Nous prendrons l'axe des x parallèle à la direction commune des axes, et comme cette direction a pour paramètres directeurs b' et b, nous aurons $b = 0$.

Les équations des deux paraboles peuvent alors s'écrire

$$u^2 + 2b''uv + 2b'uw + a'v^2 = 0,$$

$$u^2 + 2b''_1uv + 2b'_1uw + a'_1v^2 = 0.$$

En éliminant u on obtient

$$(a'_1-a')^2v^4-4[(b''_1-b'')v+(b'_1-b')w][(a'_1b''-a'b''_1)v+(a'_1b'-a'b'_1)w]v^2=0.$$

Cette équation admet deux fois la racine $v = 0$; à cette racine correspond la valeur $u = 0$, ce qui donne comme tangente double la droite de l'infini.

Pour que le contact soit du deuxième ordre, il faut que le coefficient de w^2v^2 soit nul, c'est-à-dire qu'on ait

$$(b'_1 - b')(a'_1b' - a'b'_1) = 0;$$

$b'_1 - b'$ ne peut être nul, sans quoi à la racine $v = 0$ correspondraient deux valeurs de u différentes.

On devra donc avoir

$$a'_1 b' - a' b'_1 = 0$$

ou

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a'_1}{b'_1}.$$

Pour que le contact soit du troisième ordre, il faudra que le coefficient de wv^3 soit nul, ce qui donne

$$\frac{b''}{a'} = \frac{b''_1}{a'_1}.$$

On pourrait également étudier la position relative des branches infinies en faisant $w = -1$, et en développant u en série ordonnée par rapport aux puissances de v.

On a

$$u = -(b''v - b') \pm \sqrt{(b''v - b')^2 - a'v^2},$$

$$u = -(b''v - b') \pm \sqrt{b'^2 - 2b'b''v + (b''^2 - a')v^2},$$

$$u = b' - b''v - b'\left[1 - 2\frac{b''}{b'}v + \frac{b''^2 - a'}{b'^2}v^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$u = b' - b''v - b'\left[1 - \frac{b''}{b'}v - \frac{a'}{2b'^2}v^2 - \frac{a'b''}{2b'^3}v^3 + \cdots\right],$$

ou bien

$$u = \frac{a'}{2b'}v^2 + \frac{a'b''}{2b'^2}v^3 + \cdots$$

Si m désigne le coefficient angulaire de la droite

$$ux + vy - 1 = 0,$$

on a $m = -\frac{u}{v}$, et le développement précédent peut s'écrire

$$m = -\frac{a'}{2b'}v - \frac{a'b''}{2b'^2}v^2 + \cdots; \qquad (7)$$

v est l'inverse de l'ordonnée à l'origine.

On aura de même pour la deuxième parabole

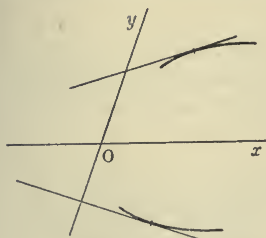
$$m_1 = -\frac{a'_1}{2b'_1}v - \frac{a'_1 b''_1}{2b'^2_1}v^2 + \cdots;$$

et en faisant la différence,

$$m - m_1 = \left(\frac{a'_1}{2b'_1} - \frac{a'}{2b'}\right)v + \left(\frac{a'_1 b''_1}{2b'^2_1} - \frac{a'b''}{2b'^2}\right)v^2 + \cdots$$

Considérons la formule (7); elle nous permet de déterminer la position des branches infinies de la première courbe.

En effet, en supposant $-\frac{a'}{2b'} > 0$, on voit que m a le signe de



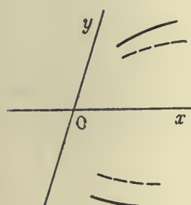
v pour les valeurs de v suffisamment petites ; on voit ainsi que la parabole tourne sa concavité vers les x positifs ; ce serait le contraire si $-\frac{a'}{2b'}$ était négatif.

Pour avoir la position relative des branches de courbes, nous distinguerons plusieurs cas comme précédemment.

Premier cas. $\frac{a'}{b'} \neq \frac{a'_1}{b'_1}$. *Contact du premier ordre.*

Si $\frac{a'}{b'}$ et $\frac{a'_1}{b'_1}$ sont de signes contraires, les deux paraboles tournent leurs concavités en des sens différents.

Si $\frac{a'}{b'}$ et $\frac{a'_1}{b'_1}$ sont de même signe, négatifs par exemple, les deux



paraboles tournent leurs concavités vers les x positifs, et $m - m_1$ a le signe de v, si

$$\frac{a'_1}{b'_1} > \frac{a'}{b'}.$$

Nous aurons donc les branches de courbe ci-contre.

Deuxième cas. $\frac{a'}{b'} = \frac{a'_1}{b'_1}$. $\frac{b''}{a'} \neq \frac{b''_1}{a'_1}$. *Contact du deuxième ordre.*

Les deux courbes tournent toujours leurs concavités dans le même sens, on voit de plus que $m - m_1$ a un signe constant quel que soit v.

Les branches infinies des deux courbes s'entrecroisent.

On peut remarquer aussi que les paramètres des paraboles sont égaux.

Nous avons vu en effet que le paramètre d'une parabole est donné par la formule (137)

$$p = \frac{|\Delta| \sin^2 \theta}{(b^2 + b'^2 + 2bb' \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette formule devient pour la première de nos courbes

$$p = \frac{|-a'b'^2| \sin^2 \theta}{|b'^3|} = \left|\frac{a'}{b'}\right| \sin^2 \theta.$$

Comme $\frac{a'}{b'} = \frac{a'_1}{b'_1}$, les paramètres des deux paraboles sont égaux. On peut énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux paraboles aient un contact du second ordre à l'infini, est que ces deux paraboles aient leurs axes parallèles, leur concavité dans le même sens et leurs paramètres égaux.

Troisième cas. $\frac{a'}{b'} = \frac{a'_1}{b'_1}$. $\frac{b''}{a'} = \frac{b''_1}{a'_1}$. *Contact du troisième ordre.*

Les deux paraboles ont toujours leur concavité dans le même sens, elles sont égales et ont même axe. La disposition relative des branches infinies est la même que dans la seconde hypothèse du premier cas. On peut énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux paraboles aient un contact du troisième ordre à l'infini, est qu'elles soient égales, qu'elles aient même axe et qu'elles tournent leur concavité dans le même sens.

CHAPITRE XI

CONIQUES INSCRITES DANS LE QUADRILATÈRE DES TANGENTES COMMUNES A DEUX CONIQUES

---

175. Théorème. — *Il existe une seule conique tangente à cinq droites dont quatre ne sont pas concourantes.*

Désignons par u_i, v_i, w_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ les coordonnées des cinq droites.

L'équation d'une conique tangente à ces cinq droites sera

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

et pour déterminer les coefficients, nous aurons les relations suivantes, obtenues en écrivant que l'équation est vérifiée par les coordonnées des cinq droites :

$$\left.\begin{aligned}
au_1^2 + a'v_1^2 + a''w_1^2 + 2bv_1w_1 + 2b'w_1u_1 + 2b''u_1v_1 &= 0, \\
au_2^2 + a'v_2^2 + a''w_2^2 + 2bv_2w_2 + 2b'w_2u_2 + 2b''u_2v_2 &= 0, \\
au_3^2 + a'v_3^2 + a''w_3^2 + 2bv_3w_3 + 2b'w_3u_3 + 2b''u_3v_3 &= 0, \\
au_4^2 + a'v_4^2 + a''w_4^2 + 2bv_4w_4 + 2b'w_4u_4 + 2b''u_4v_4 &= 0, \\
au_5^2 + a'v_5^2 + a''w_5^2 + 2bv_5w_5 + 2b'w_5u_5 + 2b''u_5v_5 &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nous avons là cinq équations linéaires et homogènes à six inconnues, a, a', a'', b, b', b''.

Supposons que l'un des déterminants à cinq lignes et cinq colonnes formés avec les coefficients des équations soit diffé-

rent de zéro, par exemple

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & w_1^2 & v_1w_1 & w_1u_1 \\ u_2^2 & v_2^2 & w_2^2 & v_2w_2 & w_2u_2 \\ u_3^2 & v_3^2 & w_3^2 & v_3w_3 & w_3u_3 \\ u_4^2 & v_4^2 & w_4^2 & v_4w_4 & w_4u_4 \\ u_5^2 & v_5^2 & w_5^2 & v_5w_5 & w_5u_5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On peut alors résoudre les équations par rapport aux cinq premières inconnues en fonction de la sixième ; on aura des expressions de la forme

$$a = \alpha b'', \qquad a' = \alpha' b'', \qquad a'' = \alpha'' b'', \qquad b = \beta b'', \qquad b' = \beta' b'' ;$$

α, α', ... β' étant fonctions des quantités u_i, v_i, w_i.

L'équation de la conique pourra alors s'écrire

$$b''(\alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2\beta' wu + 2uv) = 0,$$

et, quel que soit b'', cette équation représente une seule conique. Le théorème est ainsi démontré dans cette hypothèse.

L'équation de cette conique peut se mettre sous forme de déterminant :

$$\begin{vmatrix} u^2 & v^2 & w^2 & vw & wu & uv \\ u_1^2 & v_1^2 & w_1^2 & v_1w_1 & w_1u_1 & u_1v_1 \\ u_2^2 & v_2^2 & w_2^2 & v_2w_2 & w_2u_2 & u_2v_2 \\ u_3^2 & v_3^2 & w_3^2 & v_3w_3 & w_3u_3 & u_3v_3 \\ u_4^2 & v_4^2 & w_4^2 & v_4w_4 & w_4u_4 & u_4v_4 \\ u_5^2 & v_5^2 & w_5^2 & v_5w_5 & w_5u_5 & u_5v_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons maintenant que tous les déterminants à cinq lignes et cinq colonnes qu'on peut déduire du tableau des coefficients soient nuls, et qu'un déterminant à quatre lignes et à quatre colonnes soit différent de zéro, par exemple

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & w_1^2 & v_1w_1 \\ u_2^2 & v_2^2 & w_2^2 & v_2w_2 \\ u_3^2 & v_3^2 & w_3^2 & v_3w_3 \\ u_4^2 & v_4^2 & w_4^2 & v_4w_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On pourra alors résoudre les quatre premières équations par rapport à a, a', a'' et b, en fonction de b' et de b'', d'après la règle de Cramer, ce qui donnera des expressions de la forme

$$a = \alpha b' + \alpha_1 b'', \quad a' = \alpha' b' + \alpha'_1 b'', \quad a'' = \alpha'' b' + \alpha''_1 b'', \quad b = \beta b' + \beta_1 b'';$$

α, α_1, ... β_1 étant fonctions des quantités données u_i, v_i, w_i.

Ces valeurs, transportées dans la cinquième équation, la vérifieront, quels que soient b' et b''.

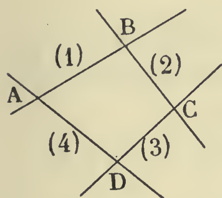
Les expressions précédentes constitueront donc la solution générale des équations données ; en transportant ces valeurs dans l'équation de la conique, on obtient

$$b'(\alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2wu) \\ + b''(\alpha_1 u^2 + \alpha'_1 v^2 + \alpha''_1 w^2 + 2\beta_1 vw + 2uv) = 0,$$

et cette équation, où b' et b'' sont arbitraires, représente une infinité de coniques.

Je vais démontrer que dans ce cas, sur les cinq droites données, quatre sont concourantes.

Il résulte des hypothèses que toutes les solutions des quatre premières équations (1) vérifient la cinquième; autrement dit, que toutes les coniques tangentes aux quatre premières droites sont tangentes à la cinquième. Supposons que ces quatre premières droites forment un quadrilatère ABCD, et considérons la conique formée par les points A et C; cette conique est tangente aux quatre premières droites; la cinquième droite devant être tangente à cette conique devra passer par l'un des points A ou C, par le point A par exemple; on verrait de même que cette cinquième droite doit passer par l'un des points B ou D, par le point B par exemple; cette droite devrait donc coïncider avec la droite AB, ce qui est impossible parce que nous supposons les cinq droites données distinctes; il faut donc que le point B coïncide avec le point A, c'est-à-dire que la droite (2) passe par l'intersection de (1) et de (4) et



alors la droite (5) passera par ce même point, et nous voyons que quatre des droites données seront concourantes.

176. Si sur les cinq droites, trois ne sont pas concourantes, la conique tangente à ces cinq droites est une véritable conique qui ne peut se réduire à deux points.

Si trois des droites sont concourantes, la conique tangente aux cinq droites se compose de deux points, dont l'un est le point de rencontre des trois droites, et l'autre le point d'intersection des deux autres droites.

Enfin si quatre des droites données sont concourantes, ce point de rencontre et un point quelconque de la cinquième droite forment une conique tangente aux cinq droites.

Nous verrons plus loin une démonstration analytique de ces résultats (233).

177. Théorème. — *Il existe une seule conique tangente à quatre droites, le point de contact sur l'une d'elles étant donné.*

Prenons le point de contact donné pour origine et la tangente correspondante pour axe des x; l'équation de la conique peut s'écrire

$$au^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0.$$

Soient

$$u_i x + v_i y + 1 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les équations des trois autres tangentes qu'on suppose ne pas passer par l'origine. On aura les équations

$$2b'u_1 + 2bv_1 + a'' + au_1^2 = 0,$$
$$2b'u_2 + 2bv_2 + a'' + au_2^2 = 0,$$
$$2b'u_3 + 2bv_3 + a'' + au_3^2 = 0.$$

Si l'on suppose les trois droites non concourantes, le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro; on peut résoudre les équations par rapport à b', b et a'' en fonction de a, et on obtient une seule conique répondant à la question.

178. Théorème. — *Il existe une seule conique tangente à trois droites, les points de contact de deux d'entre elles étant donnés.*

Prenons ces deux dernières tangentes pour axes, et désignons par α et β l'abscisse et l'ordonnée des points de contact.

L'équation générale des coniques tangentes à ces droites aux points donnés est (131)

$$\alpha\beta uv + \alpha uw + \beta vw + \lambda w^2 = 0.$$

En écrivant que cette conique est tangente à une autre droite, on détermine une seule valeur pour λ.

179. Théorème. — *Il existe une seule conique ayant avec une conique donnée en un point donné un contact du deuxième ordre, et tangente à deux droites.*

Prenons le point de contact pour origine et la tangente pour axe des x.

Soit

$$u^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0$$

a conique donnée.

La conique cherchée aura pour équation

$$u^2 + a''_1w^2 + 2b_1vw + 2b'_1wu = 0,$$

et pour que le contact soit du deuxième ordre, on doit avoir $b_1 = b$ (172).

En outre, les coefficients a''_1 et b'_1 seront déterminés en écrivant que la conique est tangente à deux autres droites.

On démontrera de la même manière le théorème suivant

180. Théorème. — *Il existe une seule conique ayant avec une conique donnée en un point donné un contact du troisième ordre, et tangente à une autre droite.*

181. Tous ces théorèmes subsistent quels que soient les tangentes et les points de contact, à distance finie ou infinie.

Ainsi, il existe une seule parabole tangente à quatre droites, une seule hyperbole asymptote à deux droites et tangente à une troisième droite ; une seule parabole tangente à trois droites, la direction de l'axe étant donnée, etc.

182. *Equation générale des coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à deux coniques.*

Soient deux coniques ayant pour équations

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$
$$f_1(u, v, w) = a_1u^2 + a_1'v^2 + a_1''w^2 + 2b_1vw + 2b_1'wu + 2b_1''uv = 0;$$

supposons qu'elles admettent quatre tangentes communes distinctes; je dis que l'équation générale des coniques tangentes à ces quatre droites est

$$f(u, v, w) + \mu f_1(u, v, w) = 0. \qquad (2)$$

En effet, quel que soit μ, cette équation est vérifiée par les coordonnées des quatre tangentes communes, puisque ces coordonnées annulent $f(u, v, w)$ et $f_1(u, v, w)$.

Tout revient à démontrer qu'on peut déterminer μ en sorte que cette équation représente une conique (C) quelconque tangente aux quatre droites.

Soient u_0, v_0, w_0 les coordonnées d'une tangente quelconque à la conique (C); écrivons que l'équation (2) est vérifiée par ces nombres ; on a

$$f(u_0, v_0, w_0) + \mu f_1(u_0, v_0, w_0) = 0,$$

d'où

$$\mu = -\frac{f(u_0, v_0, w_0)}{f_1(u_0, v_0, w_0)};$$

l'équation (2) devient

$$f(u, v, w) - \frac{f(u_0, v_0, w_0)}{f_1(u_0, v_0, w_0)} f_1(u, v, w) = 0;$$

elle représente une conique ayant cinq tangentes communes avec la conique (C) ; elle se confond avec cette conique ; il en résulte qu'on a pu disposer de μ en sorte que l'équa-

tion (2) représente la conique (C). Le théorème est démontré[1].

183. Si les deux coniques données sont tangentes en un point A, l'équation (2) est l'équation générale des coniques tangentes aux deux coniques au point A, et tangentes aussi aux deux autres tangentes communes que ces deux coniques admettent.

En effet, quel que soit μ, l'équation (2) représente une conique qui remplit ces conditions ; si par exemple u_0, v_0, w_0 sont les coordonnées de la tangente au point A, on aura

$$f(u_0, v_0, w_0) = 0, \qquad f_1(u_0, v_0, w_0) = 0$$

et

$$\frac{f'_{u_0}}{f'_{1u_0}} = \frac{f'_{v_0}}{f'_{1v_0}} = \frac{f'_{w_0}}{f'_{1w_0}};$$

on en déduit sans peine

$$f(u_0, v_0, w_0) + \mu f_1(u_0, v_0, w_0) = 0,$$

et

$$\frac{f'_{u_0} + \mu f'_{1u_0}}{f'_{u_0}} = \frac{f'_{v_0} + \mu f'_{1v_0}}{f'_{v_0}} = \frac{f'_{w_0} + \mu f'_{1w_0}}{f'_{w_0}},$$

ce qui montre que (2) représente une conique tangente au point A aux deux coniques.

Ensuite on peut disposer de μ en sorte que l'équation (2) représente une conique quelconque (C) satisfaisant aux conditions précédentes. Il suffit comme plus haut de déterminer μ en sorte que l'équation (2) soit vérifiée par les coordonnées d'une tangente à la conique (C). Cette équation représentera alors une conique tangente à la conique (C), et ayant avec celle-ci trois autres tangentes communes; ces deux coniques coïncident (177).

184. Si les deux coniques données sont bitangentes, l'équa-

(1) L'ensemble des coniques représentées par l'équation (2) constitue ce qu'on appelle un faisceau tangentiel.

tion (2) est l'équation générale des coniques bitangentes à ces deux coniques. Pour le prouver, on raisonne comme au numéro précédent.

185. Si les deux coniques ont un contact du deuxième ordre en un point A, l'équation (2) est l'équation générale des coniques ayant au point A un contact du second ordre avec chacune des coniques données, et tangentes en outre à la tangente commune aux deux coniques.

Prenons le point A pour origine et la tangente en ce point pour axe des x; les équations des deux coniques s'écrivent (172)

$$f(u, v, w) = u^2 + 2bvw + 2b'wu + a''w^2 = 0,$$
$$f_1(u, v, w) = u^2 + 2bvw + 2b'_1wu + a''_1w^2 = 0,$$

et l'équation (2) devient

$$u^2(1 + \mu) + 2b(1 + \mu)vw + 2(b' + \mu b'_1)wu + (a'' + \mu a''_1)w^2 = 0$$

ou

$$u^2 + 2bvw + 2\frac{b' + \mu b'_1}{1 + \mu}wu + \frac{a'' + \mu a''_1}{1 + \mu}w^2 = 0;$$

cette équation représente, quel que soit μ, une conique ayant à l'origine un contact du deuxième ordre avec les deux coniques données.

Cette conique est aussi tangente à la tangente commune aux coniques données.

Le raisonnement s'achève comme dans les cas précédents en s'appuyant sur le théorème du numéro 179.

La démonstration est légèrement modifiée si le point A est à l'infini.

186. Si les deux coniques ont un contact du troisième ordre en un point A, l'équation (2) est l'équation générale des coniques ayant au point A un contact du troisième ordre avec les coniques données.

187. Théorème. — *Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport à des coniques inscrites dans un quadrilatère est une droite.*

Considérons deux coniques inscrites dans le quadrilatère, et ayant pour équations tangentielles

$$f(u, v, w) = 0,$$

$$f_1(u, v, w) = 0.$$

L'équation générale des coniques inscrites dans ce quadrilatère sera

$$f(u, v, w) + \mu f_1(u, v, w) = 0.$$

Le pôle d'une droite fixe (u_0, v_0, w_0) par rapport à l'une de ces coniques aura pour coordonnées

$$f'_{u_0} + \mu f'_{1u_0}, \qquad f'_{v_0} + \mu f'_{1v_0}, \qquad f'_{w_0} + \mu f'_{1w_0};$$

ce point décrit la droite qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ f'_{u_0} & f'_{v_0} & f'_{w_0} \\ f'_{1u_0} & f'_{1v_0} & f'_{1w_0} \end{vmatrix} = 0.$$

Si la droite donnée est à l'infini, nous avons le théorème de Newton (116).

188. Exercice. — *Étant donnés un cercle qui a pour centre le point* O *et une parabole* P, *on considère toutes les coniques* C *inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes au cercle* O *et à la parabole* P. *Trouver l'enveloppe des polaires* A *du point* O *par rapport aux coniques* C; *l'enveloppe des tangentes* T *aux coniques* C, *telles que les normales aux points de contact passent par le point* O, *et l'enveloppe des axes des coniques* C.

(*Concours général, 1889.*)

Prenons deux axes rectangulaires passant par le point O, Ox étant parallèle à l'axe de la parabole. Les équations tangentielles du cercle et de la parabole seront respectivement

$$R^2(u^2 + v^2) - w^2 = 0,$$

$$au^2 + a'v^2 + 2b'wu + 2b''uv = 0.$$

L'équation générale des coniques C sera alors

$$f(u, v, w) = \lambda[R^2(u^2 + v^2) - w^2] + au^2 + a'v^2 + 2b'wu + 2b''uv = 0.$$

Soient u, v, w les coordonnées de la polaire A du point O par rapport à l'une des coniques C. L'équation du pôle est

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = 0,$$

et pour que ce pôle soit à l'origine, il faut qu'on ait

$$\frac{1}{2} f'_u = \lambda R^2 u + au + b''v + b'w = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_v = \lambda R^2 v + b'' u + a' v = 0\,;$$

en éliminant λ, on a l'équation tangentielle de l'enveloppe,

$$\frac{1}{2}\,(uf'_v - vf'_u) = b''(u^2 - v^2) + (a' - a)uv - b'vw = 0. \qquad (\alpha)$$

Cette enveloppe est une parabole dont l'axe est parallèle à Oy.

Soient maintenant u, v, w les coordonnées d'une tangente T ; on aura

$$f(u, v, w) = 0\,; \qquad (\beta)$$

en outre la droite qui joint le point O au point de contact a pour coefficient angulaire $\frac{f'_v}{f'_u}$; pour qu'elle soit perpendiculaire à T, il faut que

$$\frac{f'_v}{f'_u} = \frac{v}{u}. \qquad (\gamma)$$

Éliminant λ entre (β) et (γ), on aura l'équation de l'enveloppe. Cette élimination est toute faite, puisque l'équation (γ) ne renferme plus λ. L'équation (γ) est donc l'équation de l'enveloppe des droites T. Or cette équation est la même que l'équation (α). Il en résulte que les droites A et T ont pour enveloppe la même parabole.

Nous n'avons pas utilisé la condition (β) qui exprimait que la droite T était tangente à la conique C. Il résulte de là que l'équation (α) est l'équation de l'enveloppe des droites Δ qui sont perpendiculaires aux droites joignant le point O à leurs pôles.

Les axes des coniques C jouissent des propriétés des droites Δ, et par suite sont tangentes à la parabole (α).

En conséquence, les trois séries de droites considérées ont la même enveloppe : c'est la parabole

$$b''(u^2 - v^2) + (a' - a)uv - b'vw = 0,$$

qui a son axe parallèle à Oy ; les tangentes menées à cette parabole par le point O sont rectangulaires ; donc la directrice de cette parabole est la droite Ox.

On vérifiera sans peine que le foyer de cette parabole est sur la droite qui joint le point O au foyer F de la parabole P, à une distance du point F égale à OF.

Tous ces résultats peuvent se démontrer géométriquement (Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, tome IX, p. 35).

189. Supposons maintenant que l'une des coniques se compose de deux points P et Q ayant pour équations

$$P = \alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

$$Q = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w = 0,$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$f_1(u, v, w) \equiv P.Q ;$$

l'équation

$$f(u, v, w) + \mu PQ = 0 \tag{3}$$

est l'équation générale des coniques tangentes aux tangentes issues des points P et Q à la conique (C) qui a pour équation

$$f(u, v, w) = 0.$$

Si le point P est situé sur la conique, les tangentes issues de ce point sont confondues ; l'équation (3) est alors l'équation générale des coniques tangentes à la conique donnée au point P et tangentes aussi aux tangentes issues du point Q à cette même conique.

On peut d'ailleurs vérifier analytiquement ce résultat en prenant le point P à l'origine, la tangente en ce point à la conique étant l'axe des x.

L'équation de cette conique sera

$$au^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0,$$

et l'équation (3) s'écrit

$$au^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + \mu w(\alpha' u + \beta' v + \gamma' w) = 0 ;$$

elle représente bien une conique tangente à l'origine à l'axe des x.

190. Exercice. — *On donne une ellipse* E *et un point* P *situé dans son plan. Trouver le lieu du point* M *tel que les tangentes menées du point* P *et du point* M *à l'ellipse* E *forment un quadrilatère circonscriptible à un cercle.*

Soient

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$$

l'équation tangentielle de l'ellipse E, α, β les coordonnées du point P et x, y les coordonnées d'un point M du lieu. L'équation générale des coniques tangentes aux tangentes issues des points P et M à l'ellipse est

$$\lambda(a^2u^2 + b^2v^2 - w^2) + (u\alpha + v\beta + w)(ux + vy + w) = 0.$$

Écrivons que l'équation représente un cercle ; on a (101)

$$(\lambda a^2 + \alpha x)(1-\lambda) - \frac{(\alpha + x)^2}{4} = (\lambda b^2 + \beta y)(1-\lambda) - \frac{(\beta + y)^2}{4},$$

$$(\alpha y + \beta x)(1-\lambda) - \frac{(\alpha + x)(\beta + y)}{2} = 0.$$

Éliminant λ entre ces deux équations, on aura l'équation du lieu. La première peut s'écrire

$$\lambda(1-\lambda)c^2 + (1-\lambda)(\alpha x - \beta y) = \frac{(\alpha + x)^2 - (\beta + y)^2}{4}.$$

De la deuxième on tire

$$\lambda = -\frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{2(\alpha y + \beta x)},$$

et en remplaçant dans la première, on obtient

$$c^2(x^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2) = (\alpha^2 y^2 - \beta^2 x^2)(x^2 + y^2 - \alpha^2 - \beta^2)$$

ou

$$c^2(x^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2) = [\alpha^2(y^2-\beta^2) - \beta^2(x^2-\alpha^2)][x^2-\alpha^2+y^2-\beta^2].$$

Cette équation est homogène et du deuxième degré en $x^2-\alpha^2$ et $y^2-\beta^2$; elle représente deux coniques dont les équations s'écrivent

$$\frac{y^2-\beta^2}{x^2-\alpha^2} = m_1, \qquad \frac{y^2-\beta^2}{x^2-\alpha^2} = m_2,$$

m_1 et m_2 étant les racines de l'équation

$$c^2 m = (\alpha^2 m - \beta^2)(1+m).$$

On voit aisément que ce sont les deux coniques homofocales à l'ellipse E qui passent par le point P.

191. Coniques homofocales. — Si les points P et Q sont les points cycliques du plan, l'équation (3) est l'équation générale des coniques homofocales à la conique (C) d'après la définition même des foyers.

Si les axes sont obliques et font l'angle θ, on sait que les points cycliques sont à l'infini dans les directions dont les coefficients angulaires satisfont à l'équation

$$m^2 + 2m\cos\theta + 1 = 0.$$

Pour qu'une droite $ux + vy + w = 0$ passe par l'un de ces points, il faut que son coefficient angulaire $-\frac{u}{v}$ satisfasse à cette équation, c'est-à-dire que l'on ait

$$u^2 + v^2 - 2uv \cos\theta = 0\,;$$

telle est l'équation de l'ensemble des points cycliques.

Il en résulte que l'équation générale des coniques homofocales à la conique (C) est

$$f(u, v, w) + \mu(u^2 + v^2 - 2uv \cos\theta) = 0.$$

Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, cette équation devient

$$f(u, v, w) + \mu(u^2 + v^2) = 0.$$

Supposons que la conique soit une ellipse rapportée à ses axes, c'est-à-dire que

$$f(u, v, w) \equiv a^2u^2 + b^2v^2 - w^2\,;$$

l'équation des coniques homofocales est

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 + \mu(u^2 + v^2) = 0$$

ou

$$(a^2 + \mu)u^2 + (b^2 + \mu)v^2 - w^2 = 0,$$

et l'équation ponctuelle correspondante est

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} - 1 = 0,$$

résultat connu.

192. On peut considérer des coniques homofocales comme inscrites dans un quadrilatère dont deux sommets opposés sont les points cycliques.

Par conséquent le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport à des coniques homofocales est une droite (187) qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ f'_{u_0} & f'_{v_0} & f'_{w_0} \\ u_0 & v_0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on vérifie aisément que cette droite est perpendiculaire à la droite donnée.

193. Coniques bitangentes à une conique donnée. — Supposons que dans l'équation (3) du numéro 189 les deux points

P et Q soient confondus ; cette équation devient

$$f(u, v, w) + \mu P^2 = 0. \tag{4}$$

Nous allons démontrer que cette équation est l'équation générale des coniques bitangentes à la conique (C), les points de contact étant ceux des tangentes menées par le point P à cette conique.

Tout d'abord on voit que l'équation (4) est satisfaite par les valeurs de u, v, w qui annulent à la fois $f(u, v, w)$ et P, c'est-à-dire par les coordonnées des tangentes menées du point P à cette conique. Je dis de plus que ces tangentes communes ont mêmes points de contact dans ces deux coniques; en effet, posons

$$\varphi(u, v, w) \equiv f(u, v, w) + \mu P^2,$$

$$P \equiv \alpha u + \beta v + \gamma w;$$

on aura

$$\varphi'_u \equiv f'_u + 2\mu P\alpha,$$

$$\varphi'_v \equiv f'_v + 2\mu P\beta,$$

$$\varphi'_w \equiv f'_w + 2\mu P\gamma,$$

et si on remplace dans ces identités u, v, w par les coordonnées des tangentes menées par le point P, on a

$$\varphi'_u = f'_u,$$

$$\varphi'_v = f'_v,$$

$$\varphi'_w = f'_w,$$

ce qui montre que ces tangentes touchent les deux coniques aux mêmes points.

On verra ensuite aisément qu'on peut déterminer μ, en sorte que l'équation (4) représente une conique quelconque bitangente à (C), la corde des contacts étant la polaire du point P ; on en conclut que (4) est bien l'équation générale cherchée.

194. Considérons maintenant un quadrilatère défini par les équations de ses sommets,

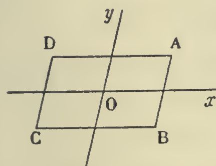
$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0, \qquad D = 0,$$

A et C étant opposés ainsi que B et D. On démontrera aisé-

ment que l'équation générale des coniques inscrites dans ce quadrilatère est

$$AC + \mu BD = 0.$$

Si l'on suppose, comme dans l'exercice du numéro 155, que le quadrilatère soit un parallélogramme ayant son centre à l'origine et ses côtés parallèles aux axes de coordonnées, les sommets auront pour équations



$$A = u\alpha + v\beta + w = 0,$$

$$C = -u\alpha - v\beta + w = 0,$$

$$B = u\alpha - v\beta + w = 0,$$

$$D = -u\alpha + v\beta + w = 0\,;$$

l'équation générale des coniques inscrites sera donc

$$(u\alpha + v\beta + w)(-u\alpha - v\beta + w) + \mu(u\alpha - v\beta + w)(-u\alpha + v\beta + w) = 0$$

ou

$$w^2 - (u\alpha + v\beta)^2 + \mu[w^2 - (u\alpha - v\beta)]^2 = 0,$$

$$(1 + \mu)[w^2 - u^2\alpha^2 - v^2\beta^2] - 2uv\alpha\beta(1 - \mu) = 0\,;$$

en posant

$$\frac{\alpha\beta(1 - \mu)}{1 + \mu} = \lambda,$$

on obtient

$$\alpha^2u^2 + \beta^2v^2 - w^2 + 2\lambda uv = 0.$$

Cette équation peut être considérée comme l'équation générale des coniques tangentes aux tangentes menées à l'ellipse

$$\alpha^2u^2 + \beta^2v^2 - w^2 = 0$$

par les points qui ont pour équations

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

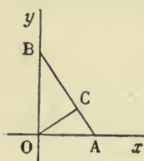
c'est-à-dire les points à l'infini dans les directions Ox et Oy.

195. Si le point B est sur la droite AC, on démontrera aisément que l'équation

$$AC + \mu BD = 0$$

est l'équation générale des coniques tangentes aux droites AD, CD et à la droite AC au point B.

Considérons par exemple un triangle rectangle AOB dont nous



prenons les côtés pour axes de coordonnées; désignons par a l'abscisse du point A, par b l'ordonnée du point B, et du point O abaissons OC perpendiculaire sur AB.

Cherchons l'équation générale des coniques tangentes aux trois côtés du triangle AOB et touchant le côté AB au point C.

Les équations des points O, A, B, C sont respectivement

$$w = 0, \quad ua + w = 0, \quad vb + w = 0, \quad ab^2u + a^2bv + (a^2 + b^2)w = 0\,;$$

l'équation générale des coniques considérées sera

$$(ua + w)(vb + w) + \mu w[ab^2u + a^2bv + (a^2 + b^2)w] = 0.$$

196. Enfin si l'on a trois points

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0,$$

l'équation générale des coniques tangentes en A et B aux droites CA et CB sera

$$AB + \mu C^2 = 0.$$

Si on suppose que le point C soit à l'origine, A sur Ox et B sur Oy, l'équation s'écrit

$$(u\alpha + w)(v\beta + w) + \mu w^2 = 0$$

ou

$$\alpha\beta uv + \beta vw + \alpha wu + \lambda w^2 = 0,$$

comme on l'a vu au numéro 131.

197. On peut déduire de là l'équation générale des paraboles dont on connaît un diamètre et la tangente à l'extrémité.

Si on désigne par x_0, y_0 les coordonnées de l'extrémité du diamètre, par α, β les paramètres directeurs du diamètre et par α', β' ceux de la tangente, l'équation générale cherchée est

$$(ux_0 + vy_0 + w)(u\alpha + v\beta) + \mu(u\alpha' + v\beta')^2 = 0\,;$$

on peut en effet considérer la parabole comme tangente à la droite de l'infini, le point de contact étant dans la direction du diamètre.

Si les directions (α, β) et (α', β') sont perpendiculaires, le point (x_0, y_0) est le sommet de la courbe.

198. Exercice. — *Lieu des foyers des hyperboles ayant une asymptote donnée et tangentes en un point donné à une droite perpendiculaire à l'asymptote.*

Prenons l'asymptote pour axe des y, la tangente pour axe des x, et désignons par a l'abscisse du point de contact.

Les hyperboles considérées sont tangentes aux droites Ox et Oy, la corde des contacts étant la parallèle à Oy menée par le point A.

Les équations du point O et du point A sont

$$w = 0, \qquad ua + w = 0\,;$$

celle du point à l'infini dans la direction Oy est

$$v = 0\,;$$

nous avons ainsi les équations des points de contact et du point de rencontre des tangentes ; l'équation générale des hyperboles sera

$$(ua + w)v + \lambda w^2 = 0.$$

Les foyers seront déterminés par les équations

$$\lambda(x^2 - y^2) + y = 0,$$

$$\lambda xy - \frac{x}{2} + \frac{a}{2} = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on aura l'équation du lieu. On trouve ainsi

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0,$$

équation d'une strophoïde droite.

199. Revenons à l'équation (3) du numéro 189 et supposons que le point P soit situé sur la conique (C) ; nous avons vu que cette équation est l'équation générale des coniques tangentes à la conique donnée au point P et tangentes aussi aux tangentes issues du point Q à la même conique.

Supposons de plus que le point Q soit sur la tangente au point P à la conique (C) ; dans ce cas l'une des tangentes issues du point Q coïncide avec la tangente en P ; il en résulte alors que l'équation

$$f(u, v, w) + \mu PQ = 0$$

est l'équation générale des coniques ayant au point P un contact du deuxième ordre avec la conique donnée, et tangentes à la tangente issue du point Q à la même conique.

200. Enfin, si le point Q coïncide avec le point P, l'équation

$$f(u, v, w) + \mu P^2 = 0$$

est l'équation générale des coniques ayant au point P un contact du troisième ordre avec la conique (C), en supposant toujours que le point P soit sur la conique.

EXERCICES ET NOTES

1. *On donne deux paraboles ayant pour foyer le point fixe* O *et pour axes les deux droites rectangulaires* Ox *et* Oy. *Trouver l'équation de la tangente commune à ces deux courbes.*

Trouver le lieu décrit par le milieu des points de contact quand la tangente commune passe par un point fixe.

On a aisément les coordonnées de la tangente commune en résolvant les équations tangentielles

$$p(u^2+v^2)-2uw=0,$$

$$q(u^2+v^2)-2vw=0$$

des deux courbes. Le lieu demandé a pour équation

$$2xy(x^2+y^2)-(\alpha y^3-3\beta xy^2-3\alpha x^2y+\beta x^3)=0,$$

α, β désignant les coordonnées du point fixe.

2. *Lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle.*

3. *D'un point* P *du plan d'une ellipse, on mène les quatre normales, et l'on considère le quadrilatère formé par les tangentes aux points d'incidence. Sur quelle courbe doit être situé le point* P *pour que le quadrilatère soit circonscriptible à un cercle?*

Soit $a^2u^2+b^2v^2-w^2=0$ l'équation de l'ellipse; on aura une relation entre les coordonnées u, v, w d'une tangente en un point d'incidence, en écrivant que la droite qui joint le point $P(x, y)$ au point de contact $\left(-\frac{a^2u}{w}, -\frac{b^2v}{w}\right)$ est perpendiculaire à cette tangente; on obtient ainsi

$$c^2uv-uwy+vwx=0$$

il suffit alors d'écrire que l'équation

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 + \lambda(c^2uv - uwy + vwx) = 0$$

représente un cercle; on élimine λ et on a l'équation du lieu,

$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{c^2}.$$

4. *Lorsqu'une conique est bitangente à une conique donnée et tangente à deux droites, le pôle de la corde des contacts décrit deux droites formant faisceau harmonique avec les deux droites données.*

5. *Lieu des pieds des normales menées d'un point à une parabole de grandeur constante tangente à deux droites rectangulaires.*

Soit $M(x, y)$ un point du lieu; on mène par M une perpendiculaire à MO ; on forme l'équation tangentielle de la parabole tangente aux deux axes et à la perpendiculaire au point M, et il suffit d'écrire que le paramètre de cette courbe est donné.

On trouve pour équation du lieu

$$4x^6y^6(x^2 + y^2) - p^2(x^4 - x^2y^2 + y^4)^3 = 0.$$

6. L'équation tangentielle générale des coniques passant par deux points α, β, γ et α', β', γ' est

$$(u\alpha + v\beta + w\gamma)(u\alpha' + v\beta' + w\gamma') + \lambda(ux + vy + wz)^2 = 0,$$

x, y, z désignant les coordonnées du point de rencontre des tangentes aux deux points donnés.

7. *Lieu des foyers des paraboles tangentes à une droite et admettant une corde commune parallèle.*

Prendre pour axes la tangente et la perpendiculaire au milieu de la corde ; se donner comme paramètres variables les coordonnées du pôle de la corde.

8. *Le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère est une cubique circulaire passant par son foyer singulier. Réciproquement, toute cubique circulaire passant par son foyer singulier peut être définie de cette manière.*

(G. Humbert, *Nouvelles Annales*, 3e série, tome XII, p. 124).

9. *Si une parabole est bitangente à une hyperbole équilatère, sa*

directrice est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint le centre de l'hyperbole au pôle de la corde des contacts.

En effet, si la parabole a pour équation

$$a^2(u^2 - v^2) - w^2 + (ux' + vy' + w)^2 = 0,$$

sa directrice a pour équation

$$2xx' + 2yy' - x'^2 - y'^2 = 0.$$

10. *Lorsque des coniques sont inscrites dans un quadrilatère, il existe deux points d'où l'on voit les coniques sous un angle droit.*

Ce théorème résulte immédiatement de ce que l'équation du cercle orthoptique contient linéairement les coefficients de l'équation tangentielle. Si ces coefficients sont fonctions du premier degré d'un paramètre, les cercles orthoptiques passent par deux points fixes.

On en conclut que les cercles décrits sur les trois diagonales d'un quadrilatère comme diamètre ont même axe radical.

11. *Si quatre coniques sont inscrites dans un quadrilatère, les pôles d'une droite quelconque ont un rapport anharmonique constant.* (Chasles, sections coniques.)

12. *La somme des angles que font avec un axe fixe les tangentes communes à deux courbes algébriques ne change pas quand on remplace ces courbes par des courbes homofocales.*

Soient

$$f(u, v, w) = 0, \qquad \varphi(u, v, w) = 0$$

les équations des deux courbes; cherchons la somme V des angles de leurs tangentes communes avec Ox.

Éliminons w entre les deux équations; on a un résultant

$$R(u, v) = A_0 u^m + A_1 u^{m-1} v + \cdots A_m v^m = 0;$$

en posant $-\frac{u}{v} = t$, on a l'équation aux coefficients angulaires; on en déduit

$$\operatorname{tg} V = \frac{A_1 - A_3 + A_5 - \cdots}{A_0 - A_2 + A_4 - \cdots},$$

ou si l'on pose $R(1, i) = M + Ni$,

$$\operatorname{tg} V = \frac{N}{M}.$$

Or pour calculer $R(1, i)$, il suffit d'éliminer w entre les équations $f(1, i, w) = 0$ et $\varphi(1, i, w) = 0$; par conséquent V ne change

pas si on remplace les équations des deux courbes respectivement par les équations

$$f(u, v, w) + (u^2 + v^2) f_1(u, v, w) = 0,$$

$$\varphi(u, v, w) + (u^2 + v^2) \varphi_1(u, v, w) = 0.$$

Ce théorème est dû à M. G. HUMBERT.

La démonstration qui précède a été donnée par M. E. BOREL. (*Nouvelles Annales*, 3e série, tome IX, p. 123).

13. *Lieu des foyers des paraboles bitangentes à un cercle et passant par un point fixe.*

14. *Étant données les équations tangentielles de trois coniques,* $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, *ayant trois tangentes communes, l'équation générale des coniques tangentes à ces trois droites est*

$$\alpha f + \beta \varphi + \gamma \psi = 0.$$

En déduire l'équation générale des coniques tangentes à trois des tangentes communes à deux coniques données.

Soient $f = 0$, $\varphi = 0$ les équations tangentielles des deux coniques, et $P = 0$, $Q = 0$ les équations de deux points situés sur une tangente commune T. Les équations des deux coniques pourront s'écrire

$$f = AP + BQ = 0,$$

$$\varphi = A_1 P + B_1 Q = 0,$$

et l'équation

$$\psi = AB_1 - BA_1 = 0$$

représentera une conique tangente aux tangentes communes aux coniques données, excepté à la tangente T.

L'équation générale demandée sera

$$\alpha f + \beta \varphi + \gamma (AB_1 - BA_1) = 0.$$

Appliquons cela à la recherche de l'équation générale des coniques tangentes aux trois tangentes communes à deux paraboles. Il faut exclure la droite de l'infini. On écrira

$$f(u, v, w) = u(au + b''v + 2b'w) + v(a'v + b''u + 2bw) = 0,$$

$$\varphi(u, v, w) = u(a_1 u + b''_1 v + 2b'_1 w) + v(a'_1 v + b''_1 u + 2b_1 w) = 0,$$

et l'équation générale sera

$$\alpha f + \beta \varphi + \gamma[(au + b''v + 2b'w)(a'_1 v + b''_1 u + 2b_1 w) - (a_1 u + b''_1 v + 2b'_1 w)(a'v + b''u + 2bw)] = 0.$$

15. *Quand deux angles sont circonscrits à une conique, les quatre côtés et les deux cordes de contact sont tangents à une même conique.*

L'équation de cette conique est

$$2(u_1 f'_{u_0} + v_1 f'_{v_0} + w_1 f'_{w_0}) f(u, v, w) - (u f'_{u_0} + v f'_{v_0} + w f'_{w_0})(u f'_{u_1} + v f'_{v_1} + w f'_{w_1}) = 0,$$

u_0, v_0, w_0 et u_1, v_1, w_1 désignant les coordonnées des cordes de contact.

16. *L'équation générale des paraboles ayant pour foyer le point* (α, β) *est*

$$u^2 + v^2 + (u\alpha + v\beta + w)(\lambda u + \mu v) = 0,$$

λ, μ *étant les paramètres directeurs de l'axe.*

17. *Pour qu'il existe une conique passant par deux points* C *et* D, *et tangente aux tangentes issues de deux points* A *et* B *à une conique* S, *il faut et il suffit qu'il existe une conique passant par* A *et* B, *et tangente aux tangentes issues de* C *et* D *à la conique* S.

Si l'on suppose que les points C et D soient les points cycliques, on a l'exercice résolu au numéro 190.

Proposition corrélative. On peut en déduire la propriété suivante : *l'enveloppe des axes radicaux de deux cercles dont l'un est fixe et l'autre, variable, reste tangent à deux droites fixes, se compose des deux paraboles qui passent par les points communs au cercle fixe et aux deux droites fixes.*

18. *Etant données deux coniques homofocales, trouver le lieu des sommets des angles droits* AMA′ *dont les côtés* MA *et* MA′ *touchent respectivement les deux courbes.*

Les deux autres tangentes MB *et* MB′ *menées de* M *aux deux coniques se coupent aussi à angle droit.*

Les droites qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes MA *et* MA′ *ou* MB *et* MB′ *enveloppent une conique homofocale aux proposées.*

19. *Soient* A, B *et* C, D *deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à un cercle ; trouver le lieu du point de rencontre des tangentes communes aux coniques ayant pour foyers* A *et* B *et aux coniques ayant pour foyers* C *et* D.

(*Revue de Mathématiques spéciales*, tome I, p. 310).

20. *Une parabole de grandeur constante se déplace en restant tangente à deux droites perpendiculaires ; trouver le lieu de l'extrémité du diamètre qui passe par le point de rencontre des deux droites.*

Soit x, y un point du lieu ; l'équation générale des paraboles tangentes aux deux axes, et dont ce point est l'extrémité du diamètre passant par l'origine est

$$(ux + vy + w)(ux + vy) - (ux - vy)^2 = 0\,;$$

il suffit alors d'écrire que le paramètre est constant.

21. *Lieu du centre d'une hyperbole équilatère de grandeur constante bitangente à une parabole.*

22. *Étant données des coniques homofocales, par un foyer* F *on mène une droite fixe ; les tangentes aux points de rencontre de cette droite avec les coniques enveloppent une parabole, qui a pour foyer le deuxième foyer* F′ *et pour directrice la droite fixe. La portion de chaque tangente comprise entre la conique correspondante et la parabole est vue du foyer* F *sous un angle droit.*

23. *Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe par rapport à des coniques homofocales.*

L'équation générale des coniques étant

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 + \lambda(u^2 + v^2) = 0,$$

la polaire du point α, β sera déterminée par

$$\frac{(a^2 + \lambda)u}{\alpha} = \frac{(b^2 + \lambda)v}{\beta} = \frac{-w}{1}.$$

En éliminant λ on obtient l'équation de l'enveloppe,

$$c^2uv + \alpha vw - \beta wu = 0,$$

qui représente une parabole tangente aux deux axes.

24. *On considère des coniques homofocales, et l'on demande l'enveloppe des normales telles que les tangentes aux points d'incidence passent par un point fixe.*

Cette enveloppe est la même que la précédente ; expliquer pourquoi *a priori*.

25. *On a vu* (ex. 23) *que l'enveloppe des polaires d'un point fixe par rapport à des coniques homofocales est une parabole. Quelle*

courbe doit décrire le point fixe pour que le point de contact de l'axe de la parabole avec son enveloppe coïncide constamment avec le foyer?

La parabole a pour équation

$$c^2uv + \alpha vw - \beta uw = 0.$$

Son foyer est déterminé par les équations

$$\beta x + \alpha y = 0,$$
$$-\alpha x + \beta y + c^2 = 0;$$

on en tire

$$x = \frac{c^2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad y = -\frac{c^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

D'autre part, on trouve aisément que l'axe de la parabole a pour équation

$$\alpha x + \beta y - \frac{c^2(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

Considérons α et β comme fonctions d'une variable; cherchons l'intersection de l'axe avec la droite infiniment voisine et écrivons que ce point coïncide avec le foyer. Il sera plus simple de poser

$$\alpha = \rho \cos \omega, \qquad \beta = \rho \sin \omega$$

et de considérer ρ comme fonction inconnue de ω.

L'équation de l'axe s'écrit

$$\rho x \cos \omega + \rho y \sin \omega - c^2 \cos 2\omega = 0$$

ou

$$x + y \operatorname{tg} \omega - \frac{c^2 \cos 2\omega}{\rho \cos \omega} = 0.$$

En différentiant, on a l'ordonnée du point de contact de l'axe et de son enveloppe,

$$y = -\frac{c^2}{\rho^2}[\sin \omega(2 \cos^2 \omega + 1)\rho + \rho' \cos \omega \cos 2\omega].$$

Écrivons que cette quantité est égale à l'ordonnée du foyer $\dfrac{-c^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$ ou $-\dfrac{c^2 \sin \omega}{\rho}$; on a

$$2\rho \sin \omega \cos \omega + \rho' \cos 2\omega = 0,$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{\sin 2\omega}{\cos 2\omega}.$$

Intégrant,

$$L\rho = \frac{1}{2} L \cos 2\omega + LA,$$

$$\rho = A\sqrt{\cos 2\omega}.$$

Cette équation représente une lemniscate de Bernoulli.

26. *Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales.*

27. *Si l'on considère des coniques homofocales, le lieu des points de contact des tangentes menées par un point* P *pris sur l'un des axes est un cercle. Les cercles qui correspondent à deux points pris respectivement sur chacun des axes se coupent orthogonalement.*

28. *On considère les coniques tangentes à deux droites rectangulaires* OA *et* OB *en deux points variables et à une droite* AB *en un point* C. *On demande le lieu des foyers de ces coniques. Construire le lieu dans le cas particulier où le point* C *est au milieu de* AB *et examiner ce que devient ce lieu lorsque* C *étant au milieu de* AB, *on a* $OA = OB$.

29. *Former l'équation générale des coniques pour lesquelles une droite* AB *donnée en longueur et en position est un diamètre, et qui sont tangentes à une droite* CD.

Séparer les points de contact de cette droite qui correspondent à des ellipses de ceux qui correspondent à des hyperboles.

Trouver le lieu des extrémités du diamètre conjugué de celui qui passe par le point de contact.

Prendre pour axes AB et une parallèle à CD menée par le milieu de AB ; l'équation générale des coniques ayant AB pour diamètre sera

$$(ua + w)(ua - w) + \lambda(u + vm)^2 = 0,$$

m étant le coefficient angulaire des tangentes aux points A et B.

30. *Étant donnés deux points* A *et* B *sur une circonférence, on demande le lieu des foyers des paraboles tangentes en* A *et* B *aux cordes* MA *et* MB, *lorsque le point* M *décrit le cercle.*

31. *Une ellipse et une parabole ont un foyer commun, et le second foyer de l'ellipse se trouve sur la directrice de la parabole; démontrer que le triangle ayant pour sommets le foyer commun et les points de contact d'une tangente commune est rectangle.*

En prenant pour origine le foyer commun et pour axe Ox l'axe focal de l'ellipse, on voit aisément que les équations des deux courbes sont

$$b^2(u^2+v^2)-2cuw-w^2=0, \tag{1}$$
$$c(u^2+v^2)+uw+2\lambda vw=0,$$

et les tangentes communes vérifient l'équation

$$(b^2+2c^2)u+2\lambda b^2 v+cw=0; \tag{2}$$

en écrivant que les droites joignant l'origine aux points de contact d'une tangente sont rectangulaires, on a une condition que l'on peut obtenir en combinant (1) et (2).

32. *Soient* A, B, C, D *quatre points quelconques d'un plan*, Da, Db, Dc *les perpendiculaires abaissées de* D, *respectivement, sur les droites* BC, CA, AB. *Démontrer que les trois paraboles ayant pour foyers les points* A, B, C *et pour tangentes aux sommets les droites* Da, Db, Dc, *sont inscrites à un même triangle.*

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x', y') les coordonnées des points A, B, C, D. La directrice de la parabole qui a pour foyer A est perpendiculaire à BC et passe par le point $(2x'-x_1,\ 2y'-y_1)$ symétrique de A par rapport à D.

L'équation de la directrice est donc

$$(x+x_1-2x')(x_2-x_3)+(y+y_1-2y')(y_2-y_3)=0.$$

Or on a vu, au numéro 162, que l'équation de la parabole qui a pour foyer le point (α, β) et pour directrice la droite (u_0, v_0, w_0) est

$$(u_0\alpha+v_0\beta+w_0)(u^2+v^2)-2(u\alpha+v\beta+w)(uu_0+vv_0)=0.$$

L'équation de la première parabole peut donc s'écrire

$$(u^2+v^2)[(x_2-x_3)(x_1-x')+(y_2-y_3)(y_1-y')]$$
$$-(ux_1+vy_1+w)[u(x_2-x_3)+v(y_2-y_3)]=0.$$

On obtient les deux autres en faisant des permutations circulaires des indices 1, 2 et 3.

En ajoutant les équations des trois paraboles, on a une identité; on en conclut que ces trois courbes sont inscrites au même triangle.

33. *On donne un triangle* ABC, *un point* D *sur le côté* BC *et un point* F *dans le plan. On considère les deux coniques inscrites dans les triangles* ABD, ACD *et ayant pour foyer commun le point* F. *Le segment qui joint les points de contact de la tangente* AD *est vu du point* F *sous un angle dont la grandeur est indépendante du point* D.

34. *On donne un triangle et un point. On considère trois paraboles ayant le point pour foyer et tangentes à deux côtés du triangle. Si*

l'on mène à la première de ces paraboles la tangente qui coupe perpendiculairement le troisième côté du triangle, et de même pour les deux autres, les trois droites qu'on obtient ainsi seront tangentes à une même parabole homofocale avec les trois autres.

35. *Étant données deux paraboles de même sommet et dont les axes sont perpendiculaires :*

1° *Trouver le lieu des points tels qu'une tangente menée à une parabole et une tangente menée à l'autre soient perpendiculaires ;*

2° *Trouver les points pour lesquels les quatre tangentes sont perpendiculaires deux à deux ;*

3° *Trouver l'équation de la tangente commune réelle aux deux paraboles ;*

4° *Trouver le lieu de la projection du sommet commun sur cette tangente commune, quand le point dont les projections sur les axes sont les foyers, décrit une circonférence ayant son centre au sommet commun.*

36. *Étant données deux droites rectangulaires* Ox, Oy *et une circonférence touchant ces deux droites, démontrer que le foyer d'une parabole touchant les lignes* Ox, Oy *et la circonférence donnée décrit une circonférence tangente à* Ox *et* Oy.

Démontrer que la corde de contact de la parabole avec l'angle xOy *enveloppe une hyperbole équilatère ayant pour foyer le point* O.

37. *Une conique est inscrite dans un parallélogramme* ABCD. *La tangente menée en un point* M *de la courbe rencontre les côtés* BC CD *respectivement en* R, Q ; *la parallèle à* BC *par* M *coupe* AB *en* L, *et la parallèle à* CD *par* M *coupe* AD *en* N. *Démontrer que les triangles* LMQ *et* NMR *sont équivalents.*

CHAPITRE XII

OMBILICS ET DROITES QUI ONT MÊME PÔLE PAR RAPPORT A DEUX CONIQUES

---

201. On appelle ombilic relatif à deux coniques un point de rencontre de deux tangentes communes.

Comme, en général, deux coniques admettent quatre tangentes communes, les six sommets du quadrilatère formé par ces tangentes seront des ombilics. Deux sommets opposés de ce quadrilatère constituent ce que nous appellerons deux ombilics correspondants ou un couple d'ombilics ; il en résulte qu'un couple d'ombilics peut être considéré comme une conique singulière inscrite dans le quadrilatère des tangentes communes.

Cette remarque va nous permettre de déterminer analytiquement les ombilics.

Soient, en effet,

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0, \quad (C)$$

$$f_1(u, v, w) = a_1u^2 + a'_1v^2 + a_1w^2 + 2b_1vw + 2b'_1wu + 2b''_1uv = 0 \quad (C_1)$$

les équations des deux coniques.

L'équation générale des coniques tangentes aux tangentes communes à (C) et à (C_1) est

$$f(u, v, w) + \lambda f_1(u, v, w) = 0, \quad (1)$$

et cette équation représentera deux ombilics correspondants

si le discriminant du premier membre est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & b''+\lambda b''_1 & b'+\lambda b'_1 \\ b''+\lambda b''_1 & a'+\lambda a'_1 & b+\lambda b_1 \\ b'+\lambda b'_1 & b+\lambda b_1 & a''+\lambda a''_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Cette équation est du troisième degré par rapport à λ ; comme à chaque racine de cette équation correspond un couple d'ombilics, on voit bien que les deux coniques admettent en général six ombilics qui seront déterminés si l'on peut résoudre l'équation (2).

Connaissant les ombilics, on en déduit aisément les tangentes communes ; la recherche de ces tangentes est donc ramenée à la résolution d'une équation du troisième degré, au lieu de l'équation du quatrième degré que nous avons discutée dans le chapitre X.

Mais la considération des ombilics et l'étude de l'équation (2) présentent un intérêt plus puissant que celui qui s'attache à la simplification toute théorique du calcul des coordonnées des tangentes communes.

Nous allons montrer en effet dans ce qui va suivre que de la nature des racines de l'équation (2) on peut déduire la nature des tangentes communes aux deux coniques.

Auparavant il est utile de rappeler qu'étant donnée une équation du second degré

$$\varphi(u, v, w) = 0$$

dont le discriminant du premier membre est nul, cette équation représente deux points *distincts* si tous les mineurs du discriminant ne sont pas nuls.

Les coordonnées de la droite qui joint ces deux points vérifient les équations

$$\varphi'_u = 0, \qquad \varphi'_v = 0, \qquad \varphi'_w = 0,$$

lesquelles n'admettent qu'un seul système de solutions.

En outre l'équation ponctuelle correspondante représente une droite double, qui est précisément la droite joignant les deux points.

Si maintenant tous les mineurs du discriminant de la fonction $\varphi(u, v, w)$ sont nuls, l'équation

$$\varphi(u, v, w) = 0$$

représente deux points confondus ou un point double, et les équations

$$\varphi'_u = 0, \qquad \varphi'_v = 0, \qquad \varphi'_w = 0$$

ont leurs premiers membres proportionnels et sont vérifiées par les coordonnées d'une droite quelconque passant par le point double.

202. Désignons par A_λ, A'_λ, A''_λ, B_λ, B'_λ, B''_λ les coefficients de $a+\lambda a_1$, $a'+\lambda a'_1, \ldots,$ $b''+\lambda b''_1$ dans le développement du déterminant $\Delta(\lambda)$; on aura les formules (93)

$$\left.\begin{aligned}(a+\lambda a_1)\Delta(\lambda) &= A'_\lambda A''_\lambda - B^2_\lambda, & (b+\lambda b_1)\Delta(\lambda) &= B'_\lambda B''_\lambda - A_\lambda B_\lambda,\\ (a'+\lambda a'_1)\Delta(\lambda) &= A''_\lambda A_\lambda - B'^2_\lambda, & (b'+\lambda b'_1)\Delta(\lambda) &= B''_\lambda B_\lambda - A'_\lambda B'_\lambda,\\ (a''+\lambda a''_1)\Delta(\lambda) &= A_\lambda A'_\lambda - B''^2_\lambda, & (b''+\lambda b''_1)\Delta(\lambda) &= B_\lambda B'_\lambda - A''_\lambda B''_\lambda.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ces équations nous montrent que si une racine λ' de l'équation (2) annule tous les mineurs de $\Delta(\lambda)$, les seconds membres des équations (3) seront divisibles par $(\lambda - \lambda')^2$, et comme λ' ne peut annuler toutes les quantités $a+\lambda a_1$, $a'+\lambda a_1, \ldots,$ car alors les coniques coïncideraient, on en conclut que λ' est au moins racine double de l'équation (2).

La réciproque n'est pas vraie ; toute racine multiple de l'équation (2) n'annule pas nécessairement les mineurs du déterminant $\Delta(\lambda)$.

203. Il résulte de ce qui précède qu'à toute racine simple de l'équation (2) correspond un couple d'ombilics distincts.

A toute racine multiple correspond soit un couple d'ombilics distincts, soit un ombilic double.

204. On retrouve la même équation (2) quand on cherche les droites qui ont même pôle par rapport aux deux coniques (C) et (C_1).

En effet, pour qu'une droite (u, v, w) ait même pôle par rapport aux coniques (C) et (C_1), il faut et il suffit que les équations

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = 0,$$

$$Uf'_{1u} + Vf'_{1v} + Wf_{1w} = 0$$

représentent le même point, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{f'_u}{f'_{1u}} = \frac{f'_v}{f'_{1v}} = \frac{f'_w}{f'_{1w}},$$

ou, en désignant par $-\lambda$ la valeur commune de ces rapports,

$$\left.\begin{aligned} f'_u + \lambda f'_{1u} &= 0, \\ f'_v + \lambda f'_{1v} &= 0, \\ f'_w + \lambda f'_{1w} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Pour que ces équations admettent des solutions en u, v, w, il faut que le déterminant $\Delta(\lambda)$ soit nul.

Si une racine λ' n'annule pas tous les mineurs, les équations (4) ont un seul système de solutions ; elles déterminent une seule droite ayant même pôle, c'est la droite qui joint les ombilics correspondant à la racine λ'.

Si au contraire la racine λ' annule tous les mineurs de $\Delta(\lambda)$, les équations (4) ont leurs coefficients proportionnels ; elles déterminent une infinité de droites passant par l'ombilic double relatif à la racine λ', et toutes ces droites ont même pôle par rapport aux deux coniques.

205. Théorème. — *Les droites doubles* [1] *relatives à deux racines différentes de l'équation* (2) *sont conjuguées par rapport à toutes les coniques du faisceau* (1).

Soient, en effet, u_1, v_1, w_1 et u_2, v_2, w_2 les coordonnées de ces droites, et λ_1, λ_2 les racines correspondantes ; on a

---

(1) Il est naturel d'appeler droite double la droite joignant deux ombilics correspondants, puisque le premier membre de l'équation ponctuelle correspondante est carré parfait. Une droite ayant même pôle dans les deux coniques sera donc une droite double et inversement.

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial u_2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial v_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial v_2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial w_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial w_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial w_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_1}{\partial w_2} = 0.$$

Multiplions les trois premières équations de gauche par u_2, v_2, w_2 respectivement et ajoutons-les membre à membre ; opérons de même sur les trois équations de droite après les avoir multipliées par u_1, v_1, w_1 ; on obtient

$$H + \lambda_1 K = 0,$$

$$H + \lambda_2 K = 0,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$H = u_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} + v_1 \frac{\partial f}{\partial v_2} + w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2},$$

$$K = u_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + v_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_2} + w_1 \frac{\partial f_1}{\partial w_2}.$$

On déduit de là

$$H = 0, \qquad K = 0,$$

puisque λ_1 est différent de λ_2.

On a alors, quel que soit λ,

$$H + \lambda K = 0,$$

ce qui montre que les deux droites sont conjuguées par rapport à la conique

$$f(u, v, w) + \lambda f_1(u, v, w) = 0.$$

Cette conclusion subsiste si à l'une des racines, λ_1 par exemple, correspond un ombilic double ; dans ce cas une droite quelconque passant par ce point est conjuguée de la droite joignant les ombilics relatifs à λ_2 par rapport à toutes les coniques du faisceau.

206. Théorème. — *Les couples d'ombilics relatifs à deux racines différentes de l'équation* (2) *n'ont pas de point commun.*

Je dis qu'on ne peut avoir

$$f + \lambda_1 f_1 \equiv PQ,$$

$$f + \lambda_2 f_1 \equiv PR,$$

P, Q, R désignant des fonctions linéaires.

De ces relations on tirerait

$$f(\lambda_2 - \lambda_1) \equiv P(\lambda_2 Q - \lambda_1 R),$$

$$f_1(\lambda_1 - \lambda_2) \equiv P(Q - R);$$

les deux coniques se composeraient alors chacune de deux systèmes de points, et ces deux systèmes auraient un point commun. Dans ce cas le premier membre de l'équation (1) se réduirait à un produit de deux facteurs, quel que soit λ, et l'équation (2) serait identiquement satisfaite.

Le théorème subsiste si à l'une des racines, λ_1 par exemple, correspond un ombilic double P ; aucun des deux ombilics relatifs à λ_2 ne peut coïncider avec le point P.

207. Théorème. — *A toute racine simple de l'équation* (2) *correspondent deux ombilics distincts et la droite qui les joint n'est tangente à aucune conique du faisceau* (1).

Si à une racine multiple correspondent deux ombilics distincts, la droite qui les joint est tangente au même point à toutes les coniques du faisceau (1).

On sait que la dérivée d'un déterminant dont les éléments sont fonctions d'une variable est égale à une somme de déterminants qu'on déduit du déterminant donné en remplaçant successivement dans chaque colonne les éléments par leurs dérivées.

On a alors

$$\Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 & b''+\lambda b''_1 & b'+\lambda b'_1 \\ b''_1 & a'+\lambda a'_1 & b+\lambda b_1 \\ b'_1 & b+\lambda b_1 & a''+\lambda a''_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & b''_1 & b'+\lambda b'_1 \\ b''+\lambda b''_1 & a'_1 & b+\lambda b_1 \\ b'+\lambda b'_1 & b_1 & a''+\lambda a''_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & b''+\lambda b''_1 & b'_1 \\ b''+\lambda b''_1 & a'+\lambda a'_1 & b_1 \\ b'+\lambda b'_1 & b+\lambda b_1 & a''_1 \end{vmatrix}$$

qu'on peut écrire

$$\Delta'(\lambda) = a_1 A_\lambda + a'_1 A'_\lambda + a''_1 A''_\lambda + 2b_1 B_\lambda + 2b'_1 B'_\lambda + 2b''_1 B''_\lambda.$$

En différentiant de même les trois déterminants dont la somme constitue $\Delta'(\lambda)$, on a

$$\frac{1}{2}\Delta''(\lambda) = A_1(a+\lambda a_1) + A'_1(a'+\lambda a'_1) + A''_1(a''+\lambda a''_1)$$
$$+ 2B_1(b+\lambda b_1) + 2B'_1(b'+\lambda\,(b'_1 + 2B''_1(b''+\lambda b''_1),$$

où A_1, A_1, ..., B''_1 désignent les mineurs du discriminant de la forme $f_1(u, v, w)$.

Cela posé, soient u_1, v_1, w_1 les coordonnées de la droite joignant les ombilics relatifs à la racine λ_1 de l'équation (2); on a, μ étant un nombre différent de zéro (26),

$$u_1^2 = \mu A_{\lambda_1}, \qquad v_1^2 = \mu A'_{\lambda_1}, \qquad w_1^2 = \mu A''_{\lambda_1},$$
$$v_1 w_1 = \mu B_{\lambda_1}, \qquad w_1 u_1 = \mu B'_{\lambda_1}, \qquad u_1 v_1 = \mu B''_{\lambda_1};$$

on en déduit

$$f_1(u_1, v_1, w_1) = \mu\Delta'(\lambda_1).$$

Comme on a aussi

$$f(u_1, v_1, w_1) + \lambda_1 f_1(u_1, v_1, w_1) = 0,$$

on en déduit

$$f(u_1, v_1, w_1) = -\mu\lambda_1\Delta'(\lambda_1),$$

et par suite, on a, quel que soit λ,

$$f(u_1, v_1, w_1) + \lambda f_1(u_1, v_1, w_1) = \mu(\lambda - \lambda_1)\Delta'(\lambda_1).$$

En conséquence, si λ_1 est racine simple, $\Delta'(\lambda_1)$ n'est pas nul ; il en est de même du premier membre de cette dernière relation; par suite, la droite (u_1, v_1, w_1) n'est tangente à aucune conique du faisceau (1).

Si au contraire λ_1 est racine multiple, $\Delta'(\lambda_1)$ est nul et la droite u_1, v_1, w_1 est tangente à toutes les coniques du faisceau (1).

Le point de contact est le même pour toutes les coniques puisque la droite a même pôle par rapport à ces coniques.

208. Supposons que la racine λ_1 soit racine triple ; on aura

(1) Cette démonstration est due à M. Koenigs.

Nous nous sommes d'ailleurs servi dans l'exposition de cette théorie d'un excellent mémoire publié par M. Niewenglowski dans la *Revue de Mathématiques Spéciales*, tome I, page 285.

alors

$$\Delta''(\lambda_1) = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de l'expression précédente,

$$A_1(a + \lambda_1 a_1) + A_1'(a' + \lambda_1 a_1') + A_1''(a'' + \lambda_1 a_1'') + \cdots = 0.$$

Désignons par x, y, z et x', y', z' les coordonnées des deux ombilics : on aura

$$f(u, v, w) + \lambda_1 f_1(u, v, w) = (ux + vy + wz)(ux' + vy' + wz') ;$$

on en tire

$$a + {}_1a_1\lambda = xx', \qquad a' + \lambda_1 a_1' = yy', \qquad a'' + \lambda_1 a_1'' = zz',$$

$$2(b + \lambda_1 b_1) = yz' + zy', \ 2(b' + \lambda_1 b_1') = zx' + xz', \ 2(b'' + \lambda_1 b_1'') = xy' + yx',$$

et la condition précédente devient

$$A_1 xx' + A_1' yy' + A_1'' zz' + B_1(yz' + zy') + B_1'(zx' + xz') + B_1''(xy' + yx') = 0 ;$$

elle exprime que les deux ombilics sont conjugués par rapport à la conique (C_1).

Or la droite qui joint ces deux points P et Q est tangente au même point M à toutes les coniques du faisceau, en particulier à la conique (C_1) ; donc l'un des points P ou Q se confond avec le point M.

Dans le cas où $f(u, v, w) + \lambda_1 f_1(u, v, w)$ est carré parfait, à la racine λ_1 correspond un point double (x, y, z) ; la relation qui précède s'écrit

$$A_1 x^2 + A_1' y^2 + A_1'' z^2 + 2B_1 yz + 2B_1' zx + 2B_1'' xy = 0 ;$$

ce point double est situé sur la conique (C_1).

Avant de passer à la discussion de l'équation (2), il nous reste à établir les théorèmes suivants au sujet de la réalité des ombilics.

209. Théorème. — *A une racine réelle de l'équation en λ correspondent ou deux ombilics réels, ou deux ombilics imaginaires conjugués.*

Nous supposons bien entendu réels les coefficients des équations des deux coniques.

Comme λ est réel, $f(u, v, w) + \lambda f_1(u, v, w)$ est décompo-

sable en une somme algébrique de deux carrés à coefficients réels. Si ces deux carrés sont affectés de coefficients de signes contraires, $\lambda f + f_1$ se décompose en un produit de deux facteurs à coefficients réels. Si ces deux carrés sont affectés de coefficients de même signe, $f + \lambda f_1$ se décompose en un produit de deux facteurs dont les coefficients sont imaginaires conjugués; les deux ombilics correspondant à ces facteurs sont également imaginaires conjugués, mais la droite qui les joint est réelle.

On peut donc dire qu'à une racine réelle de l'équation en λ correspond une droite réelle ayant même pôle par rapport aux deux coniques.

210. Théorème. — *A une racine imaginaire de l'équation en λ correspondent deux ombilics imaginaires non conjugués, et la droite qui les joint est imaginaire.*

Soit $\alpha + \beta i$ la racine imaginaire; si l'équation

$$f + (\alpha + \beta i) f_1 = 0$$

représentait deux points réels ou imaginaires conjugués, on aurait

$$f + (\alpha + \beta i) f_1 \equiv (\gamma + \delta i)(P^2 + \varepsilon Q^2), \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

P et Q étant des fonctions linéaires à coefficients réels.

On en déduirait

$$f + \alpha f_1 \equiv \gamma(P^2 + \varepsilon Q^2),$$

$$\beta f_1 \equiv \delta(P^2 + \varepsilon Q^2),$$

et l'on voit aisément que f et f_1 auraient leurs coefficients proportionnels.

On aura donc

$$f + (\alpha + \beta i) f_1 \equiv (P + iQ)(P' + iQ')$$

et

$$f + (\alpha - \beta i) f_1 \equiv (P - iQ)(P' - iQ').$$

On voit de plus que la droite qui joint les ombilics $P + iQ = 0$ et $P' + iQ' = 0$ est imaginaire, car si elle était réelle ses coordonnées annuleraient P, Q, P′, Q′; elle coïnciderait avec la droite joignant les ombilics imaginaires conju-

gués, ce qui est impossible en vertu du théorème 207, puisque la racine $\alpha + \beta i$ est simple.

Donc à une racine imaginaire de l'équation en λ correspond une droite imaginaire ayant même pôle par rapport aux deux coniques.

211. Discussion de l'équation en λ.

Premier cas. — *L'équation en λ a ses trois racines distinctes.*

Soient λ_1, λ_2, λ_3 les trois racines ; on a

$$f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1Q_1, \qquad f + \lambda_2 f_1 \equiv P_2Q_2, \qquad f + \lambda_3 f_1 \equiv P_3Q_3.$$

Les six points P_1, Q_1, P_2, etc. sont différents et la droite qui joint deux ombilics correspondants, tels que P_1 et Q_1 par exemple, ne contient aucun des quatre autres ombilics (207).

Les quatre droites, P_1P_2, P_1Q_2, Q_1P_2, Q_1Q_2 forment alors un quadrilatère dont les côtés sont les quatre tangentes communes aux deux coniques ; les points P_3 et Q_3 sont les autres sommets de ce quadrilatère.

Donc quand l'équation (1) a ses racines distinctes, les deux coniques ont quatre tangentes communes différentes.

Les trois droites P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 constituent un triangle conjugué commun par rapport à toutes les coniques du faisceau.

En ce qui concerne la réalité, on peut faire les hypothèses suivantes :

1° Supposons les trois racines λ_1, λ_2, λ_3 réelles.

Si les quatre points P_1, Q_1, P_2, Q_2 sont réels, les quatre tangentes communes sont réelles ; il en est alors de même des deux autres points P_3 et Q_3 ; le triangle conjugué commun est réel, ses côtés sont les diagonales du quadrilatère des tangentes communes.

On voit en même temps que si deux couples d'ombilics sont réels, le troisième couple est également réel.

Si les quatre points P_1, Q_1, P_2, Q_2 sont imaginaires conjugués deux à deux, les quatre tangentes communes sont imaginaires ; en effet la droite P_1P_2 par exemple ne peut être réelle

puisqu'elle rencontre en un point imaginaire P_1 la droite réelle P_1Q_1.

Mais les deux points P_3 et Q_3 sont réels, car le point P_3 par exemple est l'intersection des tangentes P_1P_2 et Q_1Q_2 qui sont imaginaires conjuguées; il en est de même pour Q_3.

Le triangle conjugué commun est toujours réel.

2° Supposons λ_1 et λ_2 imaginaires conjuguées et λ_3 réelle. Les points P_1 et Q_1 sont imaginaires non conjugués, mais ils sont respectivement imaginaires conjugués de P_2 et Q_2. Les droites P_1P_2 et Q_1Q_2 sont alors réelles et les droites P_1Q_2 et P_2Q_1 imaginaires conjuguées, puisqu'elles rencontrent en des points imaginaires les droites réelles P_1P_2 et Q_1Q_2; P_3 et Q_3 sont réels.

Dans ce cas les deux coniques admettent deux tangentes réelles et deux tangentes imaginaires conjuguées.

Le triangle conjugué commun a un côté réel et les deux autres côtés imaginaires conjugués.

On peut donc résumer de la manière suivante les résultats de cette première partie :

Quand l'équation en λ a trois racines réelles et distinctes, les deux coniques ont quatre tangentes communes réelles ou quatre tangentes communes imaginaires conjuguées deux à deux, et le triangle conjugué commun est réel (1).

Quand l'équation en λ a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées, les deux coniques ont deux tangentes communes réelles et deux tangentes communes imaginaires conjuguées. Le triangle conjugué commun a un côté réel et deux côtés imaginaires conjugués.

212. Deuxième cas. — *L'équation en λ a une racine double n'annulant pas tous les mineurs de $\Delta(\lambda)$ et une racine simple.*

Soit λ_1 la racine double et λ_2 la racine simple; à chacune de ces racines correspond un couple d'ombilics distincts.

(1) Pour que les quatre tangentes communes soient réelles, il faudra qu'à deux racines au moins de l'équation en λ correspondent des couples d'ombilics réels, c'est-à-dire qu'au moins deux racines rendent négatif A_λ ou A'_λ (25).

On a

$$f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1 Q_1, \qquad f + \lambda_2 f_1 \equiv P_2 Q_2.$$

La droite P_1Q_1 est tangente à toutes les coniques du faisceau au même point ; par conséquent l'ensemble des deux points P_2 et Q_2 constituant une conique du faisceau, on voit que l'un de ces points, P_2 par exemple, sera situé sur P_1Q_1.

Les deux coniques sont alors tangentes au point P_2 et admettent pour tangentes communes les droites P_1Q_2 et Q_1Q_2.

Les deux droites P_1Q_1 et P_2Q_2 étant réelles, leur point de rencontre P_2 est réel ; il en est de même de Q_2. Par suite, à la racine simple λ_2 correspond toujours un couple réel.

Si à la racine double correspond un couple réel, les deux tangentes P_1Q_2 et Q_1Q_2 sont réelles, tandis que si le couple relatif à la racine double se compose de deux points imaginaires conjugués, les deux tangentes P_1Q_2 et Q_1Q_2 sont imaginaires conjuguées.

On voit donc que dans ce cas les deux coniques sont tangentes en un point réel et admettent deux autres tangentes communes réelles ou imaginaires conjuguées.

213. Troisième cas. — *L'équation en λ a une racine double annulant tous les mineurs de $\Delta(\lambda)$ et une racine simple.*

λ_1 désignant la racine double et λ_2 la racine simple, on aura

$$f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1^2, \qquad f + \lambda_2 f_1 \equiv P_2 Q_2 ;$$

la droite P_2Q_2 ne peut passer par le point P_1, puisque cette droite ne peut être tangente à aucune conique du faisceau.

De ces équations on tire

$$(\lambda_2 - \lambda_1) f \equiv \lambda_2 P_1^2 - \lambda_1 P_2 Q_2,$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) f_1 \equiv P_1^2 - P_2 Q_2.$$

On voit ainsi que les deux coniques sont tangentes aux points P_2 et Q_2 aux droites P_1P_2 et P_1Q_2. (196)

Le point P_1 est toujours réel, les points P_2 et Q_2 peuvent être réels ou imaginaires conjugués.

Dans ce cas les droites qui ont même pôle par rapport aux

deux coniques se composent de la droite P_2Q_2 et de toutes les droites passant par le point P_1.

214. Quatrième cas. — *L'équation en λ a une racine triple n'annulant pas tous les mineurs de $\Delta(\lambda)$.*

Soit λ_1 cette racine ; on a

$$f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1 Q_1.$$

Nous avons vu que, dans cette hypothèse (208), les deux coniques sont tangentes au point P_1 à la droite P_1Q_1, et elles admettent une seconde tangente commune passant par le point Q_1.

Elles ont au point P_1 un contact du deuxième ordre, puisqu'on a l'identité

$$f \equiv -\lambda_1 f_1 + P_1 Q_1$$

et que le point P_1 est sur la conique (C) (199).

La droite P_1Q_1 est la seule droite qui a même pôle par rapport aux deux coniques.

215. Cinquième cas. — *L'équation en λ a une racine triple annulant tous les mineurs.*

λ_1 désignant cette racine, on a

$$f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1^2,$$

et nous avons vu (208) que le point P_1 était sur la conique (C_1). Il en résulte (200) que les coniques ont au point P_1 un contact du troisième ordre, puisqu'on peut écrire

$$f \equiv -\lambda_1 f_1 + P_1^2.$$

Toute droite passant par le point P_1 a même pôle par rapport aux deux coniques.

216. Terminons cette discussion en cherchant dans quel cas le premier membre de l'équation en λ est identiquement nul.

En décomposant $\Delta(\lambda)$ en une somme de déterminants, on obtient sans difficulté

$$\Delta(\lambda) = \Delta + \Theta\lambda + \Theta_1\lambda^2 + \Delta_1\lambda^3,$$

Δ et Δ_1 désignant les discriminants des fonctions $f(u, v, w)$ et $f_1(u, v, w)$, et en posant

$$\Theta = \mathrm{A}a_1 + \mathrm{A}'a_1 + \mathrm{A}''a_1'' + 2\mathrm{B}b_1 + 2\mathrm{B}'b_1' + 2\mathrm{B}''b_1'',$$
$$\Theta_1 = \mathrm{A}_1a + \mathrm{A}_1'a' + \mathrm{A}_1''a'' + 2\mathrm{B}_1b + 2\mathrm{B}_1'b' + 2\mathrm{B}_1''b''.$$

Pour que $\Delta(\lambda)$ soit identiquement nul, il faut qu'on ait

$$\Delta = 0, \qquad \Theta = 0, \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \Delta_1 = 0.$$

Les conditions $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$ expriment que les deux coniques se composent de deux systèmes de points P, Q et P_1, Q_1.

On voit aisément [1] que la condition $\Theta = 0$ exprime que la droite PQ est tangente à la conique (C_1), c'est-à-dire passe par l'un des points P_1, Q_1. De même la condition $\Theta_1 = 0$ exprime que la droite $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ passe par l'un des points P, Q.

Ces deux conditions seront réalisées simultanément si l'un des points P, Q coïncide avec l'un des points P_1, Q_1 ou si la droite PQ coïncide avec la droite $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$.

Tels sont les seuls cas où l'équation en λ est indéterminée.

217. Les racines de l'équation en λ sont liées d'une façon très simple aux racines de l'équation du troisième degré qu'on obtient quand on cherche les sécantes communes aux deux coniques.

L'équation en λ peut en effet s'écrire

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta_1 + \lambda^3\Delta_1 = 0,$$

en posant

$$\Theta = \mathrm{A}a_1 + \mathrm{A}'a_1' + \mathrm{A}''a_1'' + 2\mathrm{B}b_1 + 2\mathrm{B}'b_1' + 2\mathrm{B}''b_1'',$$
$$\Theta_1 = \mathrm{A}_1a + \mathrm{A}_1'a' + \mathrm{A}_1''a'' + 2\mathrm{B}_1b + 2\mathrm{B}_1'b' + 2\mathrm{B}_1''b''.$$

D'autre part les équations ponctuelles des deux coniques sont

$$\varphi(x, y, z) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy = 0,$$
$$\varphi_1(x, y, z) = \mathrm{A}_1x^2 + \mathrm{A}_1'y^2 + \mathrm{A}_1''z^2 + 2\mathrm{B}_1yz + 2\mathrm{B}_1'zx + 2\mathrm{B}_1''xy = 0,$$

---

(1) Car si u, v, w désignent les coordonnées de la droite PQ, u^2, v^2, etc. sont proportionnels à A, A', etc.

et l'équation du troisième degré exprimant que

$$\varphi(x, y, z) + \mu\varphi_1(x, y, z) = 0$$

représente deux droites est

$$\begin{vmatrix} A + \mu A_1 & B'' + \mu B''_1 & B' + \mu B'_1 \\ B'' + \mu B''_1 & A' + \mu A'_1 & B + \mu B_1 \\ B' + \mu B'_1 & B + \mu B_1 & A'' + \mu A''_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons par δ et δ_1 les discriminants des fonctions $\varphi(x, y, z)$ et $\varphi_1(x, y, z)$; par $\alpha, \alpha', \ldots\ \alpha_1, \alpha'_1 \ldots$ les coefficients de $A, A', \ldots\ A_1, A'_1 \ldots$ dans le développement de δ et de δ_1; l'équation précédente pourra s'écrire

$$\delta + \mu\theta + \mu^2\theta_1 + \mu^3\delta_1 = 0,$$

en posant

$$\theta = \alpha A_1 + \alpha' A'_1 + \alpha'' A''_1 + 2\beta B_1 + 2\beta' B'_1 + 2\beta'' B''_1,$$

$$\theta_1 = \alpha_1 A + \alpha'_1 A' + \alpha''_1 A'' + 2\beta_1 B + 2\beta'_1 B' + 2\beta''_1 B''.$$

Or on sait que

$$\delta = \Delta^2, \qquad \delta_1 = \Delta_1^2;$$

de plus

$$\alpha = A'A'' - B^2 = a\Delta,$$

$$\alpha' = A''A - B'^2 = a'\Delta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta = B'B'' - AB = b\Delta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On aura donc

$$\theta = \Delta\Theta_1, \qquad \theta_1 = \Delta_1\Theta,$$

et par suite l'équation en μ s'écrira

$$\Delta^2 + \mu\Delta\Theta_1 + \mu^2\Delta_1\Theta + \mu^3\Delta_1^2 = 0.$$

Si l'on remplace dans cette équation μ par $\frac{\Delta}{\Delta_1} \cdot \frac{1}{\lambda}$, on obtient l'équation en λ; par conséquent les racines des deux équations sont liées par la relation

$$\lambda\mu = \frac{\Delta}{\Delta_1}.$$

Il résulte de là que les valeurs de μ sont réelles ou imaginaires en même temps que les valeurs de λ.

On voit ainsi que les tangentes communes et les points communs seront tous quatre de même nature.

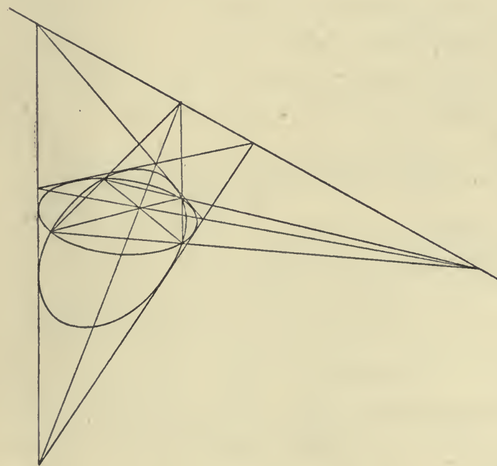
Il y a quatre cas possibles : quatre points réels et quatre tangentes réelles, quatre points imaginaires et quatre tangentes réelles, quatre points réels et quatre tangentes imaginaires, enfin quatre points imaginaires et quatre tangentes imaginaires.

Si deux tangentes seulement sont réelles, les deux coniques n'auront que deux points réels.

218. Plaçons-nous dans le premier cas et supposons que les deux coniques aient quatre tangentes communes réelles et quatre points de rencontre réels.

Nous avons démontré qu'il existait alors trois droites ayant même pôle par rapport aux deux coniques et que ces droites étaient les diagonales du quadrilatère formé par les tangentes; de plus ces droites forment un triangle conjugué commun dont les sommets sont les seuls points qui ont même polaire par rapport aux deux coniques.

On déduit de là, à l'aide du principe de dualité, ou l'on peut établir directement, que si deux coniques ont quatre points communs, il existe trois points ayant même polaire et que ces points sont les centres des couples de sécantes communes.



En conséquence, les diagonales du quadrilatère des tangentes communes forment un triangle dont les sommets coïncident avec les centres de sécantes communes; ce qui revient à dire que toute droite qui joint deux ombilics corres-

pondants contient deux centres de couples de sécantes communes.

219. Applications. — Considérons les équations tangentielles de deux cercles,

$$R^2(u^2+v^2)-(au+bv+w)^2=0,$$
$$R'^2(u^2+v^2)-(a'u+b'v+w)^2=0.$$

En retranchant ces équations multipliées respectivement par R'^2 et R^2, on obtient l'équation d'un système d'ombilics,

$$R'^2(au+bv+w)^2-R^2(a'u+b'v+w)^2=0.$$

Ces deux ombilics sont sur la ligne des centres et la divisent harmoniquement ; ce sont les centres de similitude.

L'équation de l'un de ces points peut s'écrire

$$(aR'+\varepsilon a'R)u+(bR'+\varepsilon b'R)v+(R'+\varepsilon R)w=0. \quad (\varepsilon=\pm 1)$$

Les coordonnées de ces points sont donc

$$\frac{aR'+\varepsilon a'R}{R'+\varepsilon R} \quad \text{et} \quad \frac{bR'+\varepsilon b'R}{R'+\varepsilon R}.$$

On peut discuter d'ailleurs la réalité des quatre tangentes communes, et pour simplifier le calcul nous prendrons pour origine le centre du cercle qui a le plus grand rayon et pour axe des x la ligne des centres.

Les équations des cercles peuvent alors s'écrire

$$f(u,v,w)=R^2(u^2+v^2)-w^2=0,$$
$$\varphi(u,v,w)=R'^2(u^2+v^2)-(ua+w)^2=0,$$

en supposant $R \geqq R'$ et $a>0$.

On a

$$\lambda f(u,v,w)+\varphi(u,v,w)=(\lambda R^2+R'^2-a^2)u^2+(\lambda R^2+R'^2)v^2 \\ -(\lambda+1)w^2-2auw=0,$$

et l'équation en λ peut s'écrire

$$\Delta(\lambda)=-(\lambda R^2+R'^2)f(\lambda)=0,$$

en posant

$$f(\lambda)=(\lambda R^2+R'^2-a^2)(\lambda+1)+a^2 \equiv \lambda^2R^2+\lambda(R^2+R'^2-a^2)+R'^2.$$

L'équation en λ admet la racine réelle $-\frac{R'^2}{R^2}$, à laquelle correspondent les centres de similitude, ombilics qui sont toujours réels.

Pour que l'équation $f(\lambda)=0$ ait ses racines réelles, il faut qu'on ait

$$(R^2+R'^2-a^2)^2-4R^2R'^2>0$$

ou

$$(R+R'+a)(R+R'-a)(R-R'+a)(R-R'-a)>0,$$

qui se réduit par suite des hypothèses à

$$(R + R' - a)(R - R' - a) > 0 ;$$

cette condition exprime que les deux cercles ne sont pas sécants.

Il en résulte déjà que si deux cercles se coupent, ils n'admettent que deux tangentes communes réelles.

Supposons maintenant que l'équation $f(\lambda) = 0$ ait ses racines réelles et cherchons la condition pour que les quatre tangentes communes soient réelles.

Il faut pour cela que les deux racines de $f(\lambda)$ rendent négatif le mineur

$$A_\lambda = -(\lambda R^2 + R'^2)(\lambda + 1).$$

Il est aisé de comparer les nombres -1 et $-\frac{R'^2}{R^2}$ aux racines λ' et λ'' de $f(\lambda)$. On reconnaît que -1 est inférieur à ces deux racines ; de plus $-\frac{R'^2}{R^2}$ est inférieur ou supérieur aux deux racines selon que a^2 est supérieur ou inférieur à $R^2 - R'^2$.

Si les deux cercles sont extérieurs, on a

$$a > R + R'$$

$$a^2 > R^2 - R'^2 ;$$

A_λ est négatif pour $\lambda = \lambda'$ et pour $\lambda = \lambda''$; les quatre tangentes sont réelles.

Si les deux cercles sont intérieurs,

$$a < R - R'$$

et $$a < R + R' ;$$

donc $$a^2 < R^2 - R'^2 ;$$

A_λ est positif et les quatre tangentes sont imaginaires.

220. L'équation générale des coniques ayant deux foyers donnés (a, b) et (a', b') est

$$\lambda(au + bv + w)(a'u + b'v + w) + u^2 + v^2 = 0.$$

On peut en effet considérer ces coniques comme inscrites dans le quadrilatère dont les deux foyers et les points cycliques constituent deux couples de sommets opposés.

Cela étant, considérons deux coniques ayant un foyer commun ; leurs équations peuvent s'écrire

$$\alpha(au + bv + w)(a'u + b'v + w) + u^2 + v^2 = 0,$$

$$\beta(au + bv + w)(a''u + b''v + w) + u^2 + v^2 = 0 ;$$

en retranchant membre à membre, on obtient l'équation d'un couple d'ombilics,

$$(au + bv + w)[\alpha(a'u + b'v + w) - \beta(a''u + b''v + w)] = 0,$$

qui se compose du foyer commun et d'un point situé sur la droite joignant les deux autres foyers.

221. Par un procédé analogue on peut obtenir les foyers d'une conique représentée par l'équation

$$f(u, v, w) = 0.$$

Il suffit d'écrire que l'équation

$$f(u, v, w) - S(u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta) = 0$$

représente deux points ; ces deux points seront des foyers.

Pour cela, il faut que S soit racine de l'équation (125)

$$a''S^2 \sin^2 \theta - (A + A' - 2B'' \cos \theta) S + \Delta = 0.$$

A chaque racine de cette équation correspondent deux foyers ; d'autre part les coordonnées de la droite qui les joint annulent les dérivées partielles

$$f'_u - 2S(u - v \cos \theta), \qquad f'_v - 2S(v - u \cos \theta), \qquad f'_w ;$$

cette droite est donc axe de la conique (125).

222 Considérons maintenant deux coniques tangentes à l'origine à l'axe des x. Leurs équations sont

$$f = u^2 + 2bvw + 2b'wu + a''w^2 = 0,$$

$$f_1 = u^2 + 2b_1vw + 2b'_1wu + a''_1w^2 = 0.$$

On en déduit

$$f + \lambda f_1 = u^2(1+\lambda) + 2(b+\lambda b_1)vw + 2(b'+\lambda b'_1)wu + (a''+\lambda a''_1)w^2 = 0,$$

et l'équation en λ est

$$\Delta(\lambda) = -(1 + \lambda)(b + \lambda b_1)^2 = 0.$$

A la racine double $-\dfrac{b}{b_1}$ correspondent deux ombilics situés sur l'axe Ox ; à la racine simple correspondent l'origine et un autre point.

Pour que ces deux coniques aient à l'origine un contact du deuxième ordre, il faut que l'équation en λ ait une racine triple, c'est-à-dire qu'on ait

$$b_1 = b.$$

Le couple d'ombilics correspondant a alors pour équation

$$2(b' - b'_1)wu + (a'' - a''_1)w^2 = 0.$$

Pour que le contact soit du troisième ordre, il faut que ces deux points soient confondus à l'origine, c'est-à-dire qu'on ait

$$b'_1 = b'.$$

Nous retrouvons ainsi fort simplement les conditions obtenues au numéro 172.

On établirait de la même manière les conditions pour que deux coniques asymptotes à Ox aient à l'infini un contact du deuxième ou du troisième ordre.

223. Nous terminerons ces cas particuliers en considérant deux paraboles dont les axes sont parallèles à Ox et ayant pour équations

$$f = u^2 + a'v^2 + 2b'uw + 2b''uv = 0,$$

$$f_1 = u^2 + a'_1v^2 + 2b'_1uw + 2b''_1uv = 0.$$

On aura

$$f + \lambda f_1 = u^2(1 + \lambda) + (a' + \lambda a'_1)v^2 + 2(b' + \lambda b'_1)uw + 2(b'' + \lambda b''_1)uv = 0,$$

et l'équation en λ est

$$\Delta(\lambda) = -(a' + \lambda a'_1)(b' + \lambda b'_1)^2 = 0.$$

A la racine double $-\frac{b'}{b'_1}$ correspondent deux points à l'infini, ce qui pouvait se prévoir, puisque les deux courbes sont tangentes à la droite de l'infini au même point.

A la racine simple $-\frac{a'}{a'_1}$ correspondent le point à l'infini sur Ox et un autre point à distance finie.

Pour que les deux paraboles aient à l'infini un contact du deuxième ordre, il faut que l'équation en λ ait une racine triple, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{a'}{a'_1} = \frac{b'}{b'_1}.$$

Le couple d'ombilics correspondant est

$$u^2\left(1 - \frac{a'}{a'_1}\right) + 2\left(b'' - \frac{a'}{a'_1}b''_1\right)uv = 0;$$

et pour que le contact soit du troisième ordre, il faut que ces deux points soient confondus, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{a'}{a'_1} = \frac{b''}{b''_1}.$$

224. Exercice. — *On donne une conique, un point* O *sur cette conique et l'on considère un cercle variable tangent à la conique au point* O. *On demande le lieu des points de concours des tangentes communes au cercle et à la conique.*

Prenons pour axes des x et des y la tangente et la normale au point O à la conique donnée ; l'équation de cette conique est

$$u^2 + 2bvw + 2b'wu + a''w^2 = 0.$$

D'autre part, en désignant par m l'ordonnée du centre du cercle, son équation s'écrit

$$(vm + w)^2 - m^2(u^2 + v^2) = 0$$

ou

$$m^2u^2 - 2mvw - w^2 = 0.$$

L'équation générale des coniques inscrites dans le quadrilatère des tangentes communes est

$$(1 + \lambda m^2)u^2 + 2(b - \lambda m)vw + 2b'wu + (a'' - \lambda)w^2 = 0,$$

et l'équation en λ correspondante peut s'écrire

$$\Delta(\lambda) = -(1 + \lambda m^2)(b - \lambda m)^2 = 0.$$

A la racine simple $-\frac{1}{m^2}$ correspondent l'origine et le point dont on cherche le lieu; l'équation de ce point est donc

$$2\left(b + \frac{1}{m}\right)v + 2b'u + \left(a'' + \frac{1}{m^2}\right)w = 0.$$

Ses coordonnées sont

$$\frac{x}{2b'} = \frac{y}{2\left(b + \frac{1}{m}\right)} = \frac{z}{a'' + \frac{1}{m^2}},$$

et en éliminant $\frac{1}{m}$ entre ces deux équations, on a l'équation du lieu,

$$(b'y - bx)^2 = x(2b'z - a''x),$$

qui représente une conique normale à l'origine à la conique donnée.

On a aisément l'équation tangentielle du lieu en écrivant que l'équation

$$\frac{w}{m^2} + \frac{2v}{m} + 2b'u + 2bv + a''w = 0$$

a ses racines égales en $\frac{1}{m}$, ce qui donne

$$v^2 - w(2b'u + 2bv + a''w) = 0,$$

qui peut s'écrire

$$u^2 + 2bvw + 2b'uw + a''w^2 - (u^2 + v^2) = 0,$$

et sous cette forme on reconnaît que la conique trouvée est homofocale à la conique donnée.

Remarquons aussi que cet exercice est un cas particulier de l'exercice résolu au numéro 190. Le point P est dans ce cas sur la conique, et des deux coniques homofocales trouvées, l'une coïncide avec la conique donnée.

EXERCICES ET NOTES

1. Nous avons vu que pour déterminer les ombilics relatifs à deux coniques définies par les équations tangentielles

$$f(u, v, w) = 0, \qquad f_1(u, v, w) = 0,$$

on écrit que le discriminant de $f + \lambda f_1$ est nul ; on obtient une équation

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

et en transportant une des racines dans $f + \lambda f_1$, cette expression se décompose en un produit de deux facteurs linéaires qui, égalés à zéro, déterminent deux ombilics.

Si l'on veut trouver le lieu géométrique des ombilics relatifs à deux coniques dont l'une au moins est variable, on peut obtenir les coordonnées des deux points représentés par l'équation

$$f + \lambda f_1 = 0,$$

même sans résoudre l'équation en λ ; il suffit de décomposer en carrés $f + \lambda f_1$ et de négliger le troisième carré qui est nul. On élimine alors les paramètres variables et λ entre les équations qui déterminent les coordonnées des ombilics et l'équation $\Delta(\lambda) = 0$.

Les calculs sont souvent laborieux et cette méthode n'est pas à employer dans le cas général; elle n'est réellement avantageuse que lorsqu'on peut résoudre l'équation en λ, ou lorsqu'on connaît à l'avance un ombilic, quand on sait par exemple que les deux coniques sont tangentes, etc. Nous en donnerons d'ailleurs bientôt quelques exemples.

Dans le cas général il est préférable d'opérer de la manière suivante.

Soit (x, y) un point du lieu ; j'écris que les tangentes issues de ce point aux deux coniques sont les mêmes, c'est-à-dire que les deux systèmes

$$\begin{aligned} ux + vy + w &= 0, \\ f(u, v, w) &= 0 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} ux + vy + w &= 0, \\ f_1(u, v, w) &= 0 \end{aligned}$$

ont mêmes solutions, ou, en éliminant w entre ces équations, on écrit que les deux équations

$$f[u, v, -(ux + vy)] = 0,$$

$$f_1[u, v, -(ux + vy)] = 0$$

ont mêmes racines en u et v. On obtient deux relations entre lesquelles on élimine les paramètres.

2. *Lieu des points de concours des tangentes communes à une ellipse fixe et à un cercle dont le centre est fixe et le rayon variable.*

Soient

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0,$$

$$(ux_0 + vy_0 + w)^2 - \rho^2(u^2 + v^2) = 0$$

les équations des deux courbes, ρ étant variable.

En opérant comme on l'a dit plus haut, on considère les équations

$$a^2u^2 + b^2v^2 - (ux + vy)^2 = 0,$$

$$[u(x - x_0) + v(y - y_0)]^2 - \rho^2(u^2 + v^2) = 0,$$

et on écrit qu'elles ont mêmes racines, ce qui donne

$$\frac{a^2 - x^2}{(x - x_0)^2 - \rho^2} = \frac{b^2 - y^2}{(y - y_0)^2 - \rho^2} = \frac{-xy}{(x - x_0)(y - y_0)}.$$

On élimine aisément ρ^2, et on trouve comme lieu une strophoïde dont le point double est le point x_0, y_0.

3. *Lieu des points de concours des tangentes communes à une ellipse fixe et à une ellipse de grandeur constante qui tourne autour de son centre supposé fixe.*

Les équations des deux courbes peuvent s'écrire

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0,$$

$$a'^2(u \cos \varphi + v \sin \varphi)^2 + b'^2(u \sin \varphi - v \cos \varphi)^2 - (ux_0 + vy_0 + w)^2 = 0,$$

a', b' désignant les demi-axes, x_0, y_0 les cordonnées du centre ; φ est la variable.

On peut appliquer la même méthode.

4. *Lieu des points de concours des tangentes communes à une ellipse fixe et à toutes les hyperboles équilatères qui passent par les foyers (réels et imaginaires) de l'ellipse.*

5. Si l'on connaît un ombilic relatif à deux coniques, il est aisé d'en déduire l'ombilic correspondant, c'est-à-dire le point qui, joint à l'ombilic connu, constitue une conique appartenant au faisceau tangentiel déterminé par les deux coniques.

Soient, en effet, α, β, γ les coordonnées d'un ombilic ; les équations des deux coniques pourront s'écrire

$$f(u, v, w) + (u\alpha + v\beta + w\gamma)(ux + vy + wz) = 0,$$
$$f(u, v, w) + (u\alpha + v\beta + w\gamma)(ux' + vy' + wz') = 0,$$

en désignant par $f(u, v, w) = 0$ une conique quelconque tangente aux deux tangentes communes issues du point α, β, γ.

En retranchant les deux équations, on a

$$(u\alpha + v\beta + w\gamma)[u(x - x') + v(y - y') + w(z - z')] = 0,$$

et l'ombilic correspondant au point (α, β, γ) a pour coordonnées $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$,

Comme ce point est sur la droite qui joint les points (x, y, z) et (x', y', z'), on a le théorème suivant :

Si trois coniques ont un ombilic commun, les ombilics correspondants et relatifs aux coniques prises deux à deux sont en ligne droite.

6. *Démontrer que si deux coniques de grandeur fixe ont un foyer commun* F, *et si l'une tourne autour de ce foyer dans son plan, le lieu des points de concours des tangentes communes à ces deux coniques est un cercle. Si les deux coniques sont telles que, dans une de leurs positions, les tangentes communes soient parallèles, elles le seront dans toutes; montrer que la condition de parallélisme de ces tangentes communes est l'égalité des axes non focaux.*

Le point F est un ombilic commun ; on aura aisément l'ombilic correspondant.

Soit

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$$

l'équation de la conique fixe ; en transportant l'origine au foyer $(-c, 0)$ l'équation devient

$$a^2u^2 + b^2v^2 - (uc + w)^2 = 0,$$
$$b^2(u^2 + v^2) - 2cuw - w^2 = 0.$$

Si l'on désigne par θ l'angle des axes focaux des deux coniques et par a', b', c' les éléments de la conique qui se déplace, on trouve aisément que l'équation de cette conique est

$$b'^2(u^2 + v^2) - 2c'(u \cos\theta + v \sin\theta)w - w^2 = 0.$$

Éliminons $u^2 + v^2$; il vient

$$w[2u(b^2c' \cos\theta - b'^2c) + 2b^2c'v \sin\theta + (b^2 - b'^2)w] = 0,$$

nous obtenons ainsi les coordonnées d'un point du lieu

$$x = \frac{2(b^2c' \cos\theta - b'^2c)}{b^2 - b'^2}, \qquad y = \frac{2b^2c' \sin\theta}{b^2 - b'^2};$$

il est aisé d'achever.

7. *Lieu du sommet d'une parabole tangente et confocale à une ellipse ; enveloppe de la directrice et de la tangente au sommet.*

Pour écrire que la parabole est tangente à l'ellipse, on écrit que l'ombilic correspondant au foyer est sur l'ellipse.

8. *Lieu des centres des cercles tangents à une ellipse et admettant avec cette ellipse deux tangentes communes parallèles.*

Soit $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$ l'équation de l'ellipse ; x, y désignant les coordonnées d'un point du lieu, on considère l'équation

$$\lambda(a^2u^2 + b^2v^2 - w^2) + (ux + vy + w)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0,$$

et on écrit que cette équation représente deux points dont l'un est à l'infini et l'autre sur l'ellipse.

9. *Étant donné un parallélogramme* OACB, *on considère deux paraboles variables, l'une tangente en* A *à* AC *et ayant pour diamètre* OA, *l'autre tangente en* B *à* BC *et ayant pour diamètre* OB ; *on suppose en outre que ces deux paraboles sont tangentes en un point* M ; *la tangente commune en ce point rencontre la seconde tangente commune en un point* P.

Démontrer que la tangente en M *passe par un point fixe et trouver les lieux géométriques des points* M *et* P.

Prenons pour axes OA et OB et posons $OA = a$, $OB = b$.

Les équations des deux paraboles sont

$$f = pv^2 + u(ua + w) = 0,$$

$$\varphi = qu^2 + v(vb + w) = 0 ;$$

on en déduit

$$f + \lambda\varphi = u^2(a + \lambda q) + v^2(p + \lambda b) + uw + \lambda vw = 0 ;$$

en écrivant que le discriminant est nul, on a

$$\lambda^2(a + \lambda q) + p + \lambda b = 0,$$

et pour toute racine de cette équation on a

$$f + \lambda\varphi = (u + \lambda v)\left[u(a + \lambda q) + v\,\frac{p + \lambda b}{\lambda} + w\right] = 0,$$

ou encore, en tenant compte de l'équation en λ,

$$f + \lambda\varphi = (u + \lambda v)[u(a + \lambda q) - v\lambda(a + \lambda q) + w] = 0 ;$$

cette équation représente un point à l'infini et un point à distance finie qui a pour coordonnées

$$x = a + \lambda q, \qquad y = -\lambda(a + \lambda q). \qquad (1)$$

Pour que les paraboles soient tangentes, il faut que l'équation en λ ait une racine double.

Si on remplace λ par cette racine double dans les relations (1), on a les coordonnées du point P ; au contraire en y remplaçant λ par la racine simple, on a les coordonnées du point M.

La racine double λ satisfait à l'équation dérivée

$$3\lambda^2 q + 2a\lambda + b = 0 ;$$

on en tire $q = -\frac{2a\lambda + b}{3\lambda^2}$ et, en remplaçant dans (1), on a les coordonnées du point P :

$$x = \frac{a\lambda - b}{3\lambda}, \qquad y = -\frac{a\lambda - b}{3}. \qquad \text{(P)}.$$

En éliminant λ, on a le lieu du point P.

La somme des racines de l'équation en λ est $-\frac{a}{q}$, donc la racine simple est égale à $-\frac{a}{q} - 2\lambda$; les coordonnées du point M sont alors

$$x = -2\lambda q, \qquad y = -2a\lambda - 4\lambda^2 q,$$

ou, en remplaçant q par sa valeur $-\frac{2a\lambda + b}{3\lambda^2}$,

$$x = \frac{2(2a\lambda + b)}{3\lambda}, \qquad y = \frac{2(a\lambda + 2b)}{3}. \qquad \text{(M)}$$

En éliminant λ on aura le lieu du point M.

La tangente en M est la droite MP ; on vérifiera aisément qu'elle passe par le centre de gravité du triangle ABC.

10. *D'un point* M *situé dans le plan d'une conique on mène à celle-ci les deux tangentes* MA *et* MB, *puis par le point* M *on trace une droite quelconque* MC. *Aux points* A *et* B *on construit les coniques ayant un contact du troisième ordre avec la proposée et tangentes à* MC.

Démontrer que ces coniques touchent MC *au même point* C, *et que si l'on faisait tourner l'une d'elles de manière à la rabattre autour de* MC *du côté de la première, les coniques obtenues auraient en ce point un contact du troisième ordre.*

11. *Une conique variable a un contact du deuxième ordre avec une hyperbole équilatère et a un foyer fixe au centre de cette hyperbole ; démontrer que les tangentes communes aux deux courbes se coupent sur une lemniscate.*

12. *En un point* M *d'une conique, on construit la parabole ayant*

un contact du deuxième ordre et l'on prend le symétrique P *du foyer de cette parabole par rapport à la tangente en* M ; *démontrer que le point* M *et son symétrique par rapport à* P *sont réciproques par rapport au cercle orthoptique.*

Prenons pour axes la tangente et la normale au point M ; l'équation de la conique sera

$$au^2 + w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0.$$

L'équation générale des coniques ayant à l'origine un contact du deuxième ordre avec cette conique est (199)

$$au^2 + w^2 + 2bvw + 2b'wu + w(\alpha u + \beta w) = 0,$$

et par conséquent l'équation générale des paraboles pourra s'écrire

$$au^2 + 2bvw + 2\lambda wu = 0 ;$$

on verra aisément que la polaire de l'origine par rapport au cercle orthoptique passe par le point P.

13. *Lieu des foyers et enveloppe des axes des paraboles ayant en un point donné un contact du deuxième ordre avec une conique donnée.*

14. *On considère toutes les coniques ayant un contact du troisième ordre en un point donné avec une conique donnée ; trouver le lieu des centres, des foyers et l'enveloppe des axes.*

On prendra pour axes la tangente et la normale à la conique fixe au point donné.

L'équation de cette conique sera

$$f(u, v, w) = au^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0,$$

et l'équation générale des coniques variables sera

$$f(u, v, w) + \lambda w^2 = 0.$$

15. *Deux ellipses égales sont tangentes à la même droite au même point fixe, l'une par l'extrémité du grand axe, l'autre par l'extrémité du petit axe. Les deux demi-axes* a *et* b *sont liés par la relation* $ab =$ *constante. On demande le lieu des milieux des tangentes communes.*

16. *Etant données deux coniques tangentes en un point O, on leur mène une tangente commune* OR, *ainsi que les tangentes communes extérieures* AA′, BB′, *qui se coupent en* M. *Cela posé, on demande de démontrer que :*

1° La droite PP′, *qui joint les points* P *et* P′ *diamétralement opposés au point* O *dans les deux coniques, passe par le point* M.

2° Les droites AB, A′B′ *qui joignent les points de contact de chaque conique avec les tangentes communes extérieures, se coupent en un point* R *qui est situé sur la tangente commune* OR.

3° Les tangentes menées aux deux coniques par le point R *touchent les courbes en des points qui sont situés sur la droite* MO.

On fera voir que, généralement, le point R *ne partage cette propriété avec aucun autre point, et on déterminera la condition qui doit être remplie pour qu'il existe une ligne telle que les tangentes menées par chaque point de cette ligne aux deux coniques donnent quatre points de contact en ligne droite.*

17. *Lieu des centres des ellipses dont les axes ont une direction donnée et qui ont, en un point donné, un contact du second ordre avec un cercle donné.*

CHAPITRE XIII

COORDONNÉES TRILATÈRES

225. Considérons trois droites formant un triangle et ayant pour équations

$$\left.\begin{aligned} X &= a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ Y &= a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ Z &= a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

avec la condition

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous allons démontrer que l'équation d'une courbe quelconque peut s'exprimer en égalant à zéro une fonction homogène de X, Y et Z.

En effet, désignons par $A_1, A_2, A_3, B_1, \ldots C_3$ les coefficients des petites lettres correspondantes dans le développement du déterminant D; des équations (1) on tire

$$\left.\begin{aligned} Dx &= A_1X + A_2Y + A_3Z, \\ Dy &= B_1X + B_2Y + B_3Z, \\ Dz &= C_1X + C_2Y + C_3Z. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Dès lors si l'équation d'une courbe est

$$f(x, y, z) = 0,$$

en remplaçant dans cette équation x, y, z par leurs valeurs (2), l'équation devient

$$f(A_1X + A_2Y + A_3Z, \quad B_1X + B_2Y + B_3Z, \quad C_1X + C_2Y + C_3Z) = 0.$$

Réciproquement, toute équation de la forme

$$\varphi(X, Y, Z) = 0$$

peut s'exprimer en fonction de x, y, z en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs (1); on obtient

$$\varphi(a_1x + b_1y + c_1z, \quad a_2x + b_2y + c_2z, \quad a_3x + b_3y + c_3z) = 0.$$

Toutes ces substitutions étant linéaires, les équations transformées conservent le même degré.

Ainsi l'équation d'une droite pourra s'écrire

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0;$$

l'équation d'une conique,

$$\alpha X^2 + \alpha' Y^2 + \alpha'' Z^2 + 2\beta YZ + 2\beta' ZX + 2\beta'' XY = 0,$$

X, Y, Z désignant toujours des fonctions linéaires de x, y, z qui, égalées à zéro, représentent trois droites formant triangle.

226. Supposons que dans les relations (1) on remplace x, y, z par les coordonnées homogènes d'un point M du plan; X, Y, Z prennent alors des valeurs déterminées qu'on appelle les *coordonnées trilatères* du point M.

On voit ainsi que tout point du plan a des coordonnées trilatères définies à un facteur constant près.

Réciproquement, étant données les coordonnées trilatères d'un point, les formules (2) déterminent à un facteur près les coordonnées homogènes de ce point.

Il résulte de là qu'un point est bien défini par ses coordonnées trilatères, et les considérations précédentes montrent que toute relation entre les coordonnées trilatères d'un point est la condition pour que ce point soit sur une courbe.

Le triangle dont les côtés sont représentés par les équations (1) est appelé le triangle de référence.

227. Étant donnée maintenant l'équation d'une droite

$$ux + vy + wz = 0,$$

on pourra l'écrire en introduisant les coordonnées trilatères,

$$u(A_1X+A_2Y+A_3Z)+v(B_1X+B_2Y+B_3Z)+w(C_1X+C_2Y+C_3Z)=0$$

ou

$$UX+VY+WZ=0,$$

en posant

$$\left.\begin{aligned} hU &= A_1u+B_1v+C_1w,\\ hV &= A_2u+B_2v+C_2w,\\ hW &= A_3u+B_3v+C_3w, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

h étant un nombre arbitraire.

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} ku &= a_1U+a_2V+a_3W,\\ kv &= b_1U+b_2V+b_3W,\\ kw &= c_1U+c_2V+c_3W. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Nous dirons que les nombres U, V, W sont les coordonnées tangentielles trilatères de la droite.

Les formules (3) et (4) permettent de déduire les coordonnées trilatères des coordonnées homogènes et inversement.

En raisonnant comme nous l'avons fait plus haut, on voit que l'équation tangentielle d'une courbe,

$$f(u, v, w)=0,$$

pourra s'écrire

$$f(a_1U+a_2V+a_3W,\quad b_1U+b_2V+b_3W,\quad c_1U+c_2V+c_3W)=0,$$

et, réciproquement, toute équation de la forme

$$\varphi(U, V, W)=0$$

sera l'équation tangentielle d'une courbe, puisqu'elle pourra s'écrire

$$\varphi(A_1u+B_1v+C_1w,\quad A_2u+B_2v+C_2w,\quad A_3u+B_3v+C_3w)=0.$$

Les degrés des équations transformées ne sont pas altérés; il en résulte par exemple que

$$\alpha U+\beta V+\gamma W=0$$

est l'équation d'un point, ce point ayant d'ailleurs pour coordonnées trilatères α, β, γ.

De même l'équation

$$\alpha U^2 + \alpha' V^2 + \alpha'' W^2 + 2\beta VW + 2\beta' WU + 2\beta'' UV = 0$$

est l'équation tangentielle d'une conique.

En résumé, on voit que les coordonnées trilatères d'un point sont des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées homogènes de ce point, et toute équation homogène de degré m entre les coordonnées trilatères d'un point représente une courbe de degré m.

De même, les coordonnées trilatères d'une droite sont des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées homogènes de cette droite, et toute équation homogène de degré m entre les coordonnées trilatères d'une droite représente une courbe de classe m.

228. Comme nous l'avons vu plus haut, l'équation du point est

$$\alpha U + \beta V + \gamma W = 0.$$

Étant données les équations de deux points,

$$P = \alpha U + \beta V + \gamma W = 0,$$
$$P' = \alpha' U + \beta' V + \gamma' W = 0,$$

l'équation générale des points situés sur la droite qui joint ces deux points est

$$\lambda P + \mu P' = 0;$$

cela résulte de la démonstration donnée au numéro 17, attendu qu'on peut considérer P et P' comme fonctions linéaires de u, v, w.

Nous désignerons par ABC le triangle de référence ; les sommets A, B, C ont respectivement pour équations

$$U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0;$$

les points du côté BC ont pour équation générale

$$\lambda V + \mu W = 0;$$

ceux du côté CA,

$$\lambda W + \mu U = 0;$$

et ceux du côté AB,

$$\lambda U + \mu V = 0.$$

En raisonnant comme au numéro 10, on démontrera que l'équation du point de rencontre M des deux droites Δ_1 et Δ_2 qui ont pour coordonnées trilatères U_1, V_1, W_1 et U_2, V_2, W_2, est

$$\begin{vmatrix} U & V & W \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix} = 0,$$

et par suite les coordonnées d'une droite quelconque passant par le point M sont

$$\begin{aligned} U &= \lambda U_1 + \mu U_2, \\ V &= \lambda V_1 + \mu V_2, \\ W &= \lambda W_1 + \mu W_2. \end{aligned}$$

Le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ a la même signification qu'aux numéros 12 et 13.

Si, en effet, u_1, v_1, w_1 et u_2, v_2, w_2 désignent les coordonnées homogènes des droites Δ_1 et Δ_2, on a, à un facteur constant près,

$$\begin{aligned} U_1 &= A_1 u_1 + B_1 v_1 + C_1 w_1, & U_2 &= A_1 u_2 + B_1 v_2 + C_1 w_2, \\ V_1 &= A_2 u_1 + B_2 v_1 + C_2 w_1, & V_2 &= A_2 u_2 + B_2 v_2 + C_2 w_2, \\ W_1 &= A_3 u_1 + B_3 v_1 + C_3 w_1\,; & W_2 &= A_3 u_2 + B_3 v_2 + C_3 w_2\,; \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} U &= A_1(\lambda u_1 + \mu u_2) + B_1(\lambda v_1 + \mu v_2) + C_1(\lambda w_1 + \mu w_2), \\ V &= A_2(\lambda u_1 + \mu u_2) + B_2(\lambda v_1 + \mu v_2) + C_2(\lambda w_1 + \mu w_2), \\ W &= A_3(\lambda u_1 + \mu u_2) + B_3(\lambda v_1 + \mu v_2) + C_3(\lambda w_1 + \mu w_2). \end{aligned}$$

Ces équations montrent que la droite qui a pour coordonnées trilatères U, V, W a pour coordonnées homogènes $\lambda u_1 + \mu u_2$, $\lambda v_1 + \mu v_2$, $\lambda w_1 + \mu w_2$; par conséquent cette droite fait avec Δ_2 et Δ_1 des angles dont le rapport des sinus est proportionnel à $\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|$ (13).

Quand $\frac{\lambda}{\mu}$ conserve un signe constant, la droite Δ se meut dans un angle déterminé des deux droites Δ_1 et Δ_2, mais dès que $\frac{\lambda}{\mu}$ change de signe, la droite Δ change d'angle (12).

Enfin, étant données deux droites Δ et Δ' passant par le point M et ayant pour coordonnées $\lambda U_1 + \mu U_2$ $\lambda V_1 + \mu V_2$, $\lambda W_1 + \mu W_2$ et $\lambda' U_1 + \mu' U_2$, $\lambda' V_1 + \mu' V_2$, $\lambda' W_1 + \mu' W_2$, l'un des rapports anharmoniques des quatre droites Δ, Δ', Δ_1, Δ_2 est $\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda'}{\mu'}$, et si l'on a $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\lambda'}{\mu'}$, les droites Δ et Δ' sont conjuguées harmoniques des droites Δ_1 et Δ_2.

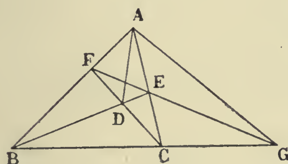
Considérons par exemple deux droites passant par le sommet A du triangle de référence ; leurs coordonnées seront 0, V, W et 0, V′ W′ ; elles seront conjuguées harmoniques par rapport aux côtés AB et AC si les deux rapports $\frac{V}{W}$ et $\frac{V'}{W'}$ sont égaux et de signes contraires.

229. **Application.** — *Soit un triangle* ABC *et un point* D ; *les droites* BD *et* CD *rencontrent respectivement* AC *et* AB *en* E *et* F ; *la droite* EF *coupe* BC *au point* G. *Nous nous proposons de démontrer que les droites* AD *et* AG *sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites* AB *et* AC.

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence, et soit

$$\alpha U + \beta V + \gamma W = 0$$

l'équation du point D.



Le point B ayant pour équation $V = 0$, on voit que

$$\alpha U + \gamma W = 0$$

est l'équation d'un point situé à la fois sur BD et sur AC ; c'est donc l'équation du point E.

De même $\alpha U + \beta V = 0$ est l'équation du point F.

En retranchant ces deux équations, on obtient

$$\beta V - \gamma W = 0,$$

qui représente le point G.

Il en résulte que les coordonnées de la droite AG vérifient les équations

$$U = 0, \qquad \beta V - \gamma W = 0.$$

Comme celles de la droite AD satisfont aux équations

$$U = 0, \qquad \beta V + \gamma W = 0,$$

le théorème est démontré.

230. Tout ce que nous avons dit au sujet de l'équation de

l'ensemble de deux points (numéros 23-29) subsiste intégralement, excepté toutefois ce qui a rapport aux points à l'infini.

On obtient les mêmes résultats en ce qui concerne le pôle d'une droite par rapport à deux points. On peut même reconnaître que l'exercice du numéro 30 est résolu à l'aide de coordonnées trilatères puisque P, Q, R désignent les premiers membres d'équations de points, c'est-à-dire des fonctions linéaires et homogènes de u, v, w.

231. Étant donnée l'équation tangentielle d'une courbe

$$f(U, V, W) = 0,$$

son équation ponctuelle en coordonnées trilatères s'obtient en éliminant U, V, W et λ entre les équations

$$f'_U - \lambda X = 0,$$

$$f'_V - \lambda Y = 0,$$

$$f'_W - \lambda Z = 0,$$

$$UX + VY + WZ = 0.$$

Si l'équation est du deuxième degré, si l'on a

$$f(U, V, W) = aU^2 + a'V^2 + a''W^2 + 2bVW + 2b'WU + 2b''UV = 0,$$

l'équation ponctuelle s'écrira

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & X \\ b'' & a' & b & Y \\ b' & b & a'' & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0,$$

en supposant, bien entendu,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tout ce qui a rapport aux tangentes, aux points de contact,

aux pôles et polaires dans les coniques, à l'intersection de deux coniques, en un mot à toutes les propriétés descriptives des figures se traite de la même manière en coordonnées homogènes et en coordonnées trilatères.

232 **Coniques inscrites dans le triangle de référence.** — En écrivant que l'équation

$$aU^2 + a'V^2 + a''W^2 + 2bVW + 2b'WU + 2b''UV = 0$$

est satisfaite par les coordonnées des côtés du triangle, on obtient

$$a = a' = a'' = 0\,;$$

il en résulte que l'équation générale cherchée peut s'écrire

$$2bVW + 2b'WU + 2b''UV = 0.$$

L'équation du point de contact d'une tangente U_0, V_0, W_0 sera

$$b(VW_0 + WV_0) + b'(WU_0 + UW_0) + b''(UV_0 + VU_0) = 0.$$

Par exemple le point de contact A' du côté BC $(V_0 = W_0 = 0)$ aura pour équation

$$b'W + b''V = 0$$

ou

$$\frac{V}{b'} + \frac{W}{b''} = 0.$$

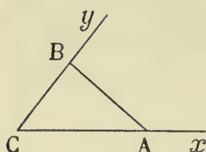
Il en résulte que les coordonnées de la droite AA' vérifient l'équation

$$\frac{U}{b} + \frac{V}{b'} + \frac{W}{b''} = 0,$$

et la symétrie du premier membre montre que les coordonnées des droites BB' et CC' satisfont également à cette équation.

Il en résulte que les droites joignant les sommets aux points de contact des côtés opposés sont concourantes, et que le point de rencontre a pour coordonnées trilatères $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b'}$ et $\frac{1}{b''}$.

Comme U, V, W représentent les premiers membres des



équations des sommets du triangle ABC, si l'on suppose que l'on prenne pour axes de coordonnées les droites CA et CB, et que l'on désigne par α et β les longueurs CA et CB, on aura

$$U = u\alpha + w,$$
$$V = v\beta + w,$$
$$W = w,$$

et l'équation générale des coniques inscrites s'écrira

$$2bw(v\beta + w) + 2b'w(u\alpha + w) + 2b''(u\alpha + w)(v\beta + w) = 0.$$

233. Il est aisé, à l'aide de cette équation, d'établir qu'il existe une conique et une seule tangente à cinq droites dont quatre ne sont pas concourantes, et de montrer qu'on a une véritable conique si trois des droites données ne passent pas par un même point.

Prenons en effet trois des tangentes pour côtés du triangle de référence, et désignons par (U_0, V_0, W_0) et (U_1, V_1, W_1) les coordonnées des deux autres tangentes. L'équation de la conique cherchée sera de la forme

$$bVW + b'WU + b''UV = 0,$$

et l'on aura pour déterminer b, b', b'' les équations

$$bV_0W_0 + b'W_0U_0 + b''U_0V_0 = 0,$$
$$bV_1W_1 + b'W_1U_1 + b''U_1V_1 = 0.$$

Supposons d'abord que ces deux dernières droites ne passent pas par un sommet du triangle ; les relations précédentes peuvent s'écrire

$$\frac{b}{U_0} + \frac{b'}{V_0} + \frac{b''}{W_0} = 0,$$
$$\frac{b}{U_1} + \frac{b'}{V_1} + \frac{b''}{W_1} = 0\ ;$$

on en tire

$$b = \lambda\left(\frac{1}{V_0W_1} - \frac{1}{W_0V_1}\right),$$

$$b' = \lambda\left(\frac{1}{W_0U_1} - \frac{1}{U_0W_1}\right),$$

$$b'' = \lambda\left(\frac{1}{U_0V_1} - \frac{1}{V_0U_1}\right),$$

et si les deux droites ne se coupent pas sur un côté du triangle, les trois nombres b, b', b'' ne sont pas nuls, le discriminant du premier membre de l'équation de la conique n'est pas nul, et l'équation représente une véritable conique.

Si la droite (U_0, V_0, W_0), par exemple, passe par le point A, U_0 est nul ; on trouve alors $b = 0$, la conique se réduit à deux points, dont le point A.

234. Étant donnée l'équation tangentielle des coniques inscrites à un triangle,

$$2bVW + 2b'WU + 2b''UV = 0,$$

l'équation ponctuelle correspondante sera

$$b^2X^2 + b'^2Y^2 + b''^2Z^2 - 2b'b''YZ - 2b''bZX - 2bb'XY = 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\sqrt{bX} \pm \sqrt{b'Y} \pm \sqrt{b''Z} = 0,$$

équation ponctuelle bien connue des coniques inscrites dans le triangle de référence.

Par un calcul tout semblable on verrait que les coniques circonscrites au triangle de référence ont pour équation ponctuelle générale

$$2bYZ + 2b'ZX + 2b''XY = 0$$

et pour équation tangentielle générale

$$b^2U^2 + b'^2V^2 + b''^2W^2 - 2b'b''VW - 2b''bWU - 2bb'UV = 0$$

ou

$$\sqrt{bU} \pm \sqrt{b'V} \pm \sqrt{b''W} = 0.$$

235. Coniques conjuguées par rapport au triangle de référence. — Soit

$$f(U,V,W) = aU^2 + a'V^2 + a''W^2 + 2bVW + 2b'WU + 2b''UV = 0$$

l'équation d'une conique.

Le pôle d'une droite (U_0, V_0, W_0) a pour équation

$$U_0 f'_U + V_0 f'_V + W_0 f'_W = 0.$$

Il en résulte que le pôle de la droite BC a pour équation

$$\frac{1}{2} f'_U = aU + b''V + b'W = 0\,;$$

pour que ce pôle soit le point A, il faut que cette équation se réduise à $U = 0$, c'est-à-dire qu'on ait

$$b' = b'' = 0.$$

De même en écrivant que le pôle de CA est le point B, on obtiendra la nouvelle condition

$$b = 0,$$

et alors on constatera aisément que le point C est le pôle de AB.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation donnée représente une conique conjuguée par rapport au triangle de référence sont donc

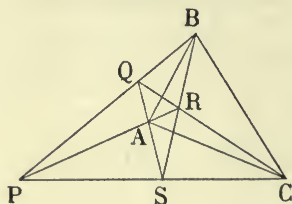
$$b = b' = b'' = 0\,;$$

l'équation cherchée est alors

$$aU^2 + a'V^2 + a''W^2 = 0.$$

Nous avons obtenu cette équation au numéro **111**.

236. Coniques circonscrites et inscrites à un quadrilatère. — Soit le quadrilatère PQRS ; prenons comme triangle de référence ABC le triangle qui a pour sommets le point de concours des diagonales et les points de rencontre des côtés opposés.



Nous commencerons par chercher les équations des côtés et des sommets.

Étant donné le triangle ABC,

on construira le quadrilatère en se donnant deux droites quelconques BP et BS conjuguées harmoniques par rapport à BA et BC, puis deux droites quelconques CR et CS conjuguées harmoniques par rapport à CA et CB ; on voit alors que les droites PR et QS se coupent au point A, car lorsque deux faisceaux harmoniques ont un rayon homologue commun, les trois autres couples de rayons homologues se coupent en des points en ligne droite.

Soient

$$X + Z = 0, \qquad (PQ)$$

$$X - Z = 0, \qquad (RS)$$

$$X + Y = 0, \qquad (QR)$$

$$X - Y = 0 \qquad (SP)$$

les équations des quatre côtés.

Remarquons que l'équation

$$X + Z = 0$$

peut représenter une droite quelconque passant par le point B ; cela revient à multiplier par un facteur convenable les équations des côtés du triangle de référence.

En retranchant les équations de PQ et de QR on a

$$Y - Z = 0,$$

qui représente la droite AQ, et l'on voit également que cette droite passe par le point S en retranchant les équations de RS et de SP.

Les équations des diagonales QS et PR sont donc

$$Y - Z = 0, \qquad (QS)$$

$$Y + Z = 0. \qquad (PR)$$

On déduit de là immédiatement les coordonnées des sommets et leurs équations.

Par exemple les coordonnées du point P satisfont aux équations

$$X + Z = 0,$$

$$X - Y = 0;$$

en prenant $X = 1$, on trouve $Y = 1$ et $Z = -1$; par suite l'équation de ce point est

$$U + V - W = 0.$$

Les équations des sommets seront

$$U + V - W = 0, \qquad (P)$$

$$U - V - W = 0, \qquad (Q)$$

$$U - V + W = 0, \qquad (R)$$

$$U + V + W = 0. \qquad (S)$$

L'équation générale des coniques circonscrites au quadrilatère sera alors

$$X^2 - Z^2 + \lambda(X^2 - Y^2) = 0$$

ou

$$X^2(1 + \lambda) - \lambda Y^2 - Z^2 = 0,$$

équation qu'on peut mettre sous la forme plus symétrique

$$aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 = 0,$$

avec la condition

$$a + a' + a'' = 0.$$

L'équation tangentielle correspondante peut s'écrire

$$\frac{U^2}{1 + \lambda} - \frac{V^2}{\lambda} - W^2 = 0$$

ou

$$\frac{U}{a} + \frac{V^2}{a'} + \frac{W^2}{a''} = 0,$$

avec la condition

$$a + a' + a'' = 0.$$

Nous voyons ainsi que *les coniques circonscrites à un quadrilatère sont conjuguées par rapport au triangle qui a pour sommets le point de concours des diagonales et les points de rencontre des côtés opposés.*

Cherchons maintenant l'équation générale des coniques inscrites ; nous formerons d'abord l'équation tangentielle, qui peut s'écrire

$$PR + \lambda QS = 0,$$

P, R, Q, S étant les premiers membres des équations des sommets du quadrilatère.

On obtient donc

$$(U+V-W)(U-V+W)+\lambda(U-V-W)(U+V+W)=0$$

ou

$$U^2-(V-W)^2+\lambda[U^2-(V+W)^2]=0$$

$$U^2(1+\lambda)-V^2(1+\lambda)-W^2(1+\lambda)-2VW(\lambda-1)=0$$

ou, en divisant par $\lambda+1$,

$$U^2-V^2-W^2+2\mu VW=0.$$

On voit ainsi qu'il n'existe qu'une seule conique du faisceau conjuguée par rapport au triangle ABC ; elle a pour équation

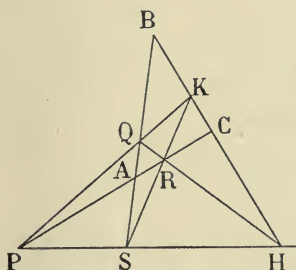
$$U^2-V^2-W^2=0,$$

elle touche chaque côté du quadrilatère aux points où ces côtés sont rencontrés par les droites AB et AC.

L'équation ponctuelle correspondante est

$$(1-\mu^2)X^2-Y^2-Z^2-2\mu YZ=0.$$

237. Supposons maintenant qu'on prenne pour triangle de référence le triangle formé par les trois diagonales. Nous commencerons par chercher les équations tangentielles des sommets. Étant donné le triangle ABC, on détermine le quadrilatère en se donnant arbitrairement deux points P et R conjugués harmoniques par rapport à A et C et deux points Q et S conjugués harmoniques par rapport à A et B.



On obtiendra ainsi pour les équations des différents sommets

$$U+W=0, \qquad (P)$$

$$U-W=0, \qquad (R)$$

$$U+V=0, \qquad (Q)$$

$$U-V=0. \qquad (S)$$

Il en résulte que les équations des points H et K sont

$$V + W = 0, \tag{H}$$

$$V - W = 0. \tag{K}$$

Cherchons maintenant les équations des côtés. Les coordonnées de la droite PQ satisfont aux équations des points P et Q; on aura donc

$$U = 1, \qquad V = -1, \qquad W = -1;$$

l'équation de cette droite sera

$$X - Y - Z = 0.$$

En opérant de la même manière on obtient les équations suivantes pour les quatre côtés du quadrilatère :

$$X - Y - Z = 0, \tag{PQ}$$

$$X - Y + Z = 0, \tag{QR}$$

$$X + Y + Z = 0, \tag{RS}$$

$$X + Y - Z = 0. \tag{SP}$$

L'équation générale tangentielle des coniques inscrites sera

$$U^2 - W^2 + \lambda(U^2 - V^2) = 0$$

ou

$$U^2(1 + \lambda) - \lambda V^2 - W^2 = 0,$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$aU^2 + a'V^2 + a''W^2 = 0,$$

avec la condition

$$a + a' + a'' = 0.$$

L'équation ponctuelle correspondante peut s'écrire

$$\frac{X^2}{1+\lambda} - \frac{Y^2}{\lambda} - Z^2 = 0$$

ou

$$\frac{X^2}{a} + \frac{Y^2}{a'} + \frac{Z^2}{a''} = 0,$$

avec la condition

$$a + a' + a'' = 0.$$

Nous voyons ainsi que *les coniques inscrites à un quadrila-*

tère sont conjuguées par rapport au triangle formé par les trois diagonales.

L'équation ponctuelle générale des coniques circonscrites sera

$$(X+Y-Z)(X-Y+Z)+\lambda(X-Y-Z)(X+Y+Z)=0$$

ou

$$X^2-(Y-Z)^2+\lambda[X^2-(Y+Z)^2]=0$$

$$X^2(1+\lambda)-Y^2(1+\lambda)-Z^2(1+\lambda)-2YZ(\lambda-1)=0$$

ou, en divisant par $\lambda+1$,

$$X^2-Y^2-Z^2+2\mu YZ=0.$$

Il existe une seule conique du faisceau conjuguée par rapport au triangle ABC ; elle a pour équation

$$X^2-Y^2-Z^2=0;$$

elle est tangente aux droites CQ, CS, BR, BP.

L'équation tangentielle des mêmes coniques est

$$(1-\mu^2)U^2-V^2-W^2-2\mu VW=0.$$

On voit qu'il existe une grande analogie entre les équations de ce numéro et celles du numéro précédent ; on déduit les secondes des premières en échangeant les coordonnées de droites en coordonnées de points et inversement.

On pouvait prévoir cette analogie en se fondant sur le principe de dualité, car si on transforme la première figure, au quadrilatère correspond un autre quadrilatère, et au triangle qui a pour sommets le point de concours de deux diagonales et les points de rencontre des côtés opposés correspond le triangle dont les côtés sont les diagonales du nouveau quadrilatère.

238. Théoreme de Hesse. — *Toute conique qui divise harmoniquement deux diagonales d'un quadrilatère divise harmoniquement la troisième diagonale.*

Prenons pour triangle de référence le triangle des trois diagonales, reportons-nous à la figure du numéro précédent et adoptons les mêmes notations.

Soit

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0$$

l'équation d'une conique.

Pour que deux points (X, Y, Z) et (X', Y', Z') soient conjugués par rapport à cette conique, il faut qu'on ait

$$AXX' + A'YY' + A''ZZ' + B(YZ' + ZY') + B'(ZX' + XZ') + B''(XY' + YX') = 0.$$

Les points P et R ayant respectivement pour coordonnées 1, 0, 1 et 1, 0, — 1 seront conjugués par rapport à la conique si l'on a

$$A - A'' = 0.$$

On voit de même que pour que les points Q et S, H et K soient conjugués par rapport à la conique, il faut qu'on ait

$$A - A' = 0,$$
$$A' - A'' = 0.$$

Cette dernière relation étant conséquence des deux précédentes, le théorème est démontré.

En supposant que X, Y, Z représentent des coordonnées de droites et en se reportant aux notations du numéro 236, ou, ce qui revient au même, en transformant par le principe de dualité, on obtient le nouvel énoncé qui suit :

Toute conique conjuguée par rapport aux côtés opposés d'un quadrilatère est conjuguée par rapport aux diagonales.

239. Théorème. — *A toute droite du plan correspond une droite conjuguée par rapport à toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère. Si l'une des droites tourne autour d'un point, la seconde enveloppe une conique inscrite dans le triangle conjugué commun à toutes les coniques du système.*

Prenons pour triangle de référence le triangle formé par les diagonales du quadrilatère ; l'équation tangentielle des coniques inscrites est (237)

$$aU^2 + a'V^2 + a''W^2 = 0,$$

avec la condition

$$a + a' + a'' = 0.$$

Le pôle d'une droite (U_0, V_0, W_0) a pour équation

$$aUU_0 + a'VV_0 + a''WW_0 = 0;$$

cette équation est satisfaite par les valeurs $\frac{1}{U_0}, \frac{1}{V_0}, \frac{1}{W_0}$; on voit ainsi que les deux droites (U_0, V_0, W_0) et $\left(\frac{1}{U_0}, \frac{1}{V_0}, \frac{1}{W_0}\right)$ sont conjuguées par rapport à toutes les coniques du faisceau.

Si la première passe par un point fixe, c'est-à-dire si l'on a

$$\alpha U_0 + \beta V_0 + \gamma W_0 = 0,$$

les coordonnées de la seconde vérifieront l'équation

$$\frac{\alpha}{U}+\frac{\beta}{V}+\frac{\gamma}{W}=0$$

ou

$$\alpha VW+\beta WU+\gamma UV=0,$$

équation qui représente une conique inscrite au triangle de référence.

En transformant par le principe de dualité, on peut énoncer le théorème suivant :

A tout point du plan correspond un point conjugué par rapport à toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère. Si l'un des points décrit une droite, le second décrit une conique circonscrite au triangle conjugué commun à toutes les coniques du faisceau.

240. Propriétés métriques. — Ces quelques exemples montrent combien l'emploi des coordonnées trilatères peut être utile dans l'étude des propriétés descriptives des figures.

Mais dès qu'on aborde les propriétés métriques, les formules se compliquent et l'emploi de ces coordonnées exige des calculs souvent laborieux.

Nous allons d'ailleurs le reconnaître dans ce qui suit en nous bornant aux propriétés les plus élémentaires.

Mais auparavant il est nécessaire de donner un sens plus précis aux coefficients a_1, a_2, ... des formules (1).

Nous poserons, selon l'usage,

$$\left.\begin{aligned}X&=-x\cos\lambda-y\sin\lambda+pz,\\Y&=-x\cos\mu-y\sin\mu+qz,\\Z&=-x\cos\nu-y\sin\nu+rz,\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

x, y, z désignant les coordonnées homogènes d'un point par rapport à des axes rectangulaires dont l'origine est à l'intérieur du triangle de référence.

Nous désignerons par **A**, **B**, **C** et **a**, **b**, **c** les angles et les côtés du triangle ; on sait que l'on a

$$\nu-\mu=\pi-\mathbf{A},\qquad\lambda-\nu=\pi-\mathbf{B},\qquad\mu-\lambda=\pi-\mathbf{C}.$$

Le déterminant D des coefficients de x, y, z peut s'écrire

$$D = \begin{vmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & p \\ \cos\mu & \sin\mu & q \\ \cos\nu & \sin\nu & r \end{vmatrix} = p\sin\mathbf{A} + q\sin\mathbf{B} + r\sin\mathbf{C} = \frac{S}{R},$$

S et R désignant la surface du triangle de référence et le rayon du cercle circonscrit.

Des équations (5) on tire

$$\left.\begin{aligned} Dx &= (q\sin\nu - r\sin\mu)X + (r\sin\lambda - p\sin\nu)Y + (p\sin\mu - q\sin\lambda)Z, \\ Dy &= (r\cos\mu - q\cos\nu)X + (p\cos\nu - r\cos\lambda)Y + (q\cos\lambda - p\cos\mu)Z, \\ Dz &= X\sin\mathbf{A} + Y\sin\mathbf{B} + Z\sin\mathbf{C}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Les formules (3) et (4) du numéro 227 deviennent

$$\left.\begin{aligned} hU &= (q\sin\nu - r\sin\mu)u + (r\cos\mu - q\cos\nu)v + w\sin\mathbf{A}, \\ hV &= (r\sin\lambda - p\sin\nu)u + (p\cos\nu - r\cos\lambda)v + w\sin\mathbf{B}, \\ hW &= (p\sin\mu - q\sin\lambda)u + (q\cos\lambda - p\cos\mu)v + w\sin\mathbf{C}; \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} ku &= -U\cos\lambda - V\cos\mu - W\cos\nu, \\ kv &= -U\sin\lambda - V\sin\mu - W\sin\nu, \\ kw &= pU + qV + rW. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Si l'on représente par α, β, γ les distances du point (x, y, z) aux côtés BC, CA, AB du triangle de référence, ces distances étant affectées du signe $+$ si ce point se trouve par rapport au côté correspondant du même côté que le sommet opposé et du signe $-$ dans le cas contraire, les formules (5) peuvent s'écrire

$$X = \alpha z, \qquad Y = \beta z, \qquad Z = \gamma z,$$

et l'on sait qu'on a la relation

$$\mathbf{a}\alpha + \mathbf{b}\beta + \mathbf{c}\gamma = 2S,$$

$$\alpha\sin\mathbf{A} + \beta\sin\mathbf{B} + \gamma\sin\mathbf{C} = \frac{S}{R}.$$

Les quantités α, β, γ sont appelées quelquefois les *coordonnées trilatères absolues* du point considéré, et dans certaines questions il est utile de les introduire.

Étant données les coordonnées trilatères d'un point (X, Y, Z) définies à un facteur constant près, on peut obtenir les coordonnées absolues de ce point, α, β, γ.

On a en effet les relations

$$\alpha = \frac{X}{z}, \qquad \beta = \frac{Y}{z}, \qquad \gamma = \frac{Z}{z}.$$

z sera déterminé par l'une des équations

$$\frac{1}{z}(aX + bY + cZ) = 2S$$

ou

$$\frac{1}{z}(X \sin \mathbf{A} + Y \sin \mathbf{B} + Z \sin \mathbf{C}) = \frac{S}{R};$$

connaissant z, on en déduit α, β, γ en fonction de X, Y, Z.

On voit aussi que les coordonnées trilatères absolues α, β, γ d'un point et les coordonnées rectangulaires x, y de ce même point sont liées par les relations

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -x \cos \lambda - y \sin \lambda + p, \\ \beta &= -x \cos \mu - y \sin \mu + q, \\ \gamma &= -x \cos \nu - y \sin \nu + r. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

241. Droite de l'infini. — Par rapport aux axes Ox et Oy, la droite de l'infini a pour équation

$$z = 0;$$

en se reportant aux formules (6), on voit qu'en coordonnées trilatères cette équation s'écrira

$$X \sin \mathbf{A} + Y \sin \mathbf{B} + Z \sin \mathbf{C} = 0$$

ou

$$aX + bY + cZ = 0.$$

Par conséquent l'équation générale des droites parallèles à la droite

$$UX + VY + WZ = 0$$

est

$$UX + VY + WZ + \lambda(X \sin \mathbf{A} + Y \sin \mathbf{B} + Z \sin \mathbf{C}) = 0,$$

et la condition pour que les deux droites

$$UX + VY + WZ = 0,$$

$$U'X + V'Y + W'Z = 0$$

soient parallèles peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} U & V & W \\ U' & V' & W' \\ \sin \mathbf{A} & \sin \mathbf{B} & \sin \mathbf{C} \end{vmatrix} = 0.$$

242. Points cycliques. — Les coordonnées des points cycliques sont, dans le système xOy,

$$x = 1, \qquad y = \pm i \qquad z = 0\,;$$

les coordonnées trilatères de ces points seront alors, en posant

$$\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta},$$

$$X = -e^{\pm i\lambda},$$

$$Y = -e^{\pm i\mu},$$

$$Z = -e^{\pm i\nu},$$

les signes se correspondant.

On peut encore écrire

$$\frac{X}{Z} = e^{\pm i(\lambda-\nu)}, \qquad \frac{Y}{Z} = e^{\pm i(\mu-\nu)}$$

ou

$$\frac{X}{Z} = e^{\pm i(\pi - \mathbf{B})} = -e^{\mp i\mathbf{B}}, \qquad \frac{Y}{Z} = e^{\mp i(\pi-\mathbf{A})} = -e^{\pm i\mathbf{A}}.$$

On pourra donc prendre pour coordonnées de ces points

$$X = -e^{-i\mathbf{B}}, \qquad X = -e^{i\mathbf{B}},$$

$$Y = -e^{i\mathbf{A}}, \quad \text{et} \quad Y = -e^{-i\mathbf{A}},$$

$$Z = 1, \qquad Z = 1.$$

L'équation de l'ensemble de ces points pourra s'écrire

$$(Ue^{i\lambda} + Ve^{i\mu} + We^{i\nu})(Ue^{-i\lambda} + Ve^{-i\mu} + We^{-i\nu}) = 0$$

ou

$$(U\cos\lambda + V\cos\mu + W\cos\nu)^2 + (U\sin\lambda + V\sin\mu + W\sin\nu)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$U^2 + V^2 + W^2 - 2VW\cos\mathbf{A} - 2WU\cos\mathbf{B} - 2UV\cos\mathbf{C} = 0.$$

243. Angle de deux droites. — Soient les deux droites

$$UX + VY + WZ = 0,$$

$$U'X + V'Y + W'Z = 0.$$

Remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs (5) en fonction de x, y, z; les équations deviennent

$$ux + vy + wz = 0,$$

$$u'x + v'y + w'z = 0,$$

en posant

$$-u = U \cos\lambda + V \cos\mu + W \cos\nu,$$

$$-v = U \sin\lambda + V \sin\mu + W \sin\nu,$$

$$-u' = U' \cos\lambda + V' \cos\mu + W' \cos\nu,$$

$$-v' = U' \sin\lambda + V' \sin\mu + W' \sin\nu.$$

L'angle θ des deux droites sera donné par la formule

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{uv' - vu'}{uu' + vv'},$$

et en remplaçant u, v, u', v' par leurs valeurs, on obtient

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\begin{vmatrix} U & V & W \\ U' & V' & W' \\ \sin \mathbf{A} & \sin \mathbf{B} & \sin \mathbf{C} \end{vmatrix}}{UU'+VV'+WW'-(VW'+WV')\cos \mathbf{A}-(WU'+UW')\cos \mathbf{B}-(UV'+VU')\cos \mathbf{C}}.$$

En égalant le numérateur à zéro, on retrouve la condition de parallélisme des deux droites, et en annulant le dénominateur, on a la condition

$$UU' + VV' + WW' - (VW' + WV') \cos \mathbf{A} - (WU' + UW') \cos \mathbf{B} - (UV' + VU') \cos \mathbf{C} = 0,$$

qui exprime que les deux droites sont perpendiculaires.

On peut déduire cette relation de l'équation de l'ensemble des points cycliques en écrivant que les deux droites sont conjuguées par rapport à ces points.

244. Propriétés métriques des coniques. — Pour reconnaître

le genre d'une conique représentée par l'équation

$$f(U, V, W) = aU^2 + a'V^2 + a''W^2 + 2bVW + 2b'WU + 2b''UV = 0, \quad (10)$$

il faut déterminer les points de rencontre de cette courbe avec la droite de l'infini, et étudier leur réalité.

En raisonnant comme au numéro 84, il est aisé de voir que les points de rencontre de cette conique avec la droite (U_1, V_1, W_1) sont réels ou imaginaires selon que l'expression $\Delta f(U_1, V_1, W_1)$ est négative ou positive, Δ désignant toujours le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}.$$

Comme l'équation de la droite de l'infini est

$$X \sin \mathbf{A} + Y \sin \mathbf{B} + Z \sin \mathbf{C} = 0,$$

nous aurons à considérer l'expression $f(\sin \mathbf{A}, \sin \mathbf{B}, \sin \mathbf{C})$, qu'il sera commode de représenter par une seule lettre, F par exemple.

Nous poserons donc

$$F = a \sin^2 \mathbf{A} + a' \sin^2 \mathbf{B} + a'' \sin^2 \mathbf{C} + 2b \sin \mathbf{B} \sin \mathbf{C} \\ + 2b' \sin \mathbf{C} \sin \mathbf{A} + 2b'' \sin \mathbf{A} \sin \mathbf{B}.$$

En conséquence, si :

$\Delta F > 0$, la conique est une ellipse ;
$\Delta F < 0$, la conique est une hyperbole ;
$F = 0$, la conique est une parabole.

245. Si $F \neq 0$, la conique a un centre, pôle de la droite de l'infini, qui a pour équation

$$\sin \mathbf{A} f'_U + \sin \mathbf{B} f'_V + \sin \mathbf{C} f'_W = 0$$

ou

$$\mathrm{a} f'_U + \mathrm{b} f'_V + \mathrm{c} f'_W = 0.$$

Les coordonnées de ce point sont alors

$$f'_{\mathrm{a}}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}), \qquad f'_{\mathrm{b}}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}), \qquad f'_{\mathrm{c}}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}).$$

Dans le cas de la parabole, l'équation qui précède représente un point à l'infini dans la direction de l'axe.

246. Axes. — La détermination des diamètres n'offre aucune difficulté.

Pour avoir les coordonnées des axes, nous remarquerons qu'un axe peut être considéré comme une droite ayant même pôle par rapport à la conique et par rapport aux points cycliques.

Les coordonnées (U, V, W) des axes vérifieront les équations

$$\frac{f'_U}{U - V\cos \mathbf{C} - W\cos \mathbf{B}} = \frac{f'_V}{-U\cos \mathbf{C} + V - W\cos \mathbf{A}}$$
$$= \frac{f'_W}{-U\cos \mathbf{B} - V\cos \mathbf{A} + W} = 2\sigma$$

ou

$$(a - \sigma)U + (b'' + \sigma\cos \mathbf{C})V + (b' + \sigma\cos \mathbf{B})W = 0,$$
$$(b'' + \sigma\cos \mathbf{C})U + (a' - \sigma)V + (b + \sigma\cos \mathbf{A})W = 0,$$
$$(b' + \sigma\cos \mathbf{B})U + (b + \sigma\cos \mathbf{A})V + (a'' - \sigma)W = 0.$$

Pour que ces équations aient des solutions non toutes nulles en U, V, W, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} a - \sigma & b'' + \sigma\cos \mathbf{C} & b' + \sigma\cos \mathbf{B} \\ b'' + \sigma\cos \mathbf{C} & a' - \sigma & b + \sigma\cos \mathbf{A} \\ b' + \sigma\cos \mathbf{B} & b + \sigma\cos \mathbf{A} & a'' - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre peut se décomposer en une somme de six déterminants.

Le coefficient de σ^3 est nul puisque les angles **A, B, C** sont les angles d'un triangle ; l'équation peut s'écrire

$$\Delta - E\sigma + F\sigma^2 = 0,$$

en posant

$$E = A + A' + A'' - 2B\cos \mathbf{A} - 2B'\cos \mathbf{B} - 2B''\cos \mathbf{C}.$$

A chaque racine de l'équation en σ correspond un axe ; la discussion ne présente pas de difficulté ; cette équation a toujours ses racines réelles, et quand elles sont égales, l'équation représente un cercle.

On voit donc que pour que l'équation (10) représente un cercle, il faut qu'on ait

$$4\Delta F - E^2 = 0.$$

Dans le cas de la parabole, l'équation en σ est du premier degré, la courbe admet un axe unique.

247. Longueurs des axes. — Désignons par

$$f_1(u, v, w) = a_1u^2 + a_1'v^2 + a_1''w^2 + 2b_1vw + 2b_1'wu + 2b_1''uv = 0$$

l'équation de la conique par rapport aux axes rectangulaires Ox et Oy dont l'origine, avons-nous dit, est à l'intérieur du triangle de référence.

On peut supposer que $f(U, V, W)$ se déduit de $f_1(u, v, w)$ à l'aide de la transformation (8), en supposant $k = 1$; on voit aisément qu'en faisant la même substitution, $u^2 + v^2$ devient

$$U^2 + V^2 + W^2 - 2VW \cos \mathbf{A} - 2WU \cos \mathbf{B} - 2UV \cos \mathbf{C},$$

de telle sorte que, quel que soit le nombre σ, l'expression

$$f_1(u, v, w) - \sigma(u^2 + v^2)$$

se transforme en l'expression

$$f(U, V, W)$$
$$- \sigma(U^2 + V^2 + W^2 - 2VW \cos \mathbf{A} - 2WU \cos \mathbf{B} - 2UV \cos \mathbf{C}).$$

Si l'on désigne par $\Delta_1(\sigma)$ et $\Delta(\sigma)$ les discriminants de ces formes et par μ le module de la transformation, on aura, quel que soit σ,

$$\Delta(\sigma) \equiv \mu^2 \Delta_1(\sigma).$$

Or, on a vu (125) que

$$\Delta_1(\sigma) \equiv a_1''\sigma^2 - \sigma(A_1 + A_1') + \Delta_1,$$

et d'après l'analyse du numéro précédent,

$$\Delta(\sigma) \equiv F\sigma^2 - E\sigma + \Delta.$$

D'autre part le module de la substitution est (240) $\frac{S}{R}$; on aura donc

$$F\sigma^2 - E\sigma + \Delta \equiv \frac{S^2}{R^2}[a_1''\sigma^2 - \sigma(A_1 + A_1') + \Delta_1];$$

on en tire

$$\Delta_1 = \frac{R^2}{S^2}\Delta,$$

$$A_1 + A_1' = \frac{R^2}{S^2} E,$$

$$a_1'' = \frac{R^2}{S^2} F.$$

Cela posé, les longueurs des demi-axes de la conique sont données par l'équation (136)

$$a_1''^3 \rho^4 + a_1''(A_1 + A_1')\rho^2 + \Delta_1 = 0;$$

en remplaçant les coefficients par les valeurs qui précèdent on obtient

$$R^4F^3\rho^4 + R^2S^2FE\rho^2 + S^4\Delta = 0.$$

La conique sera un cercle si

$$E^2 - 4\Delta F = 0,$$

et une hyperbole équilatère si

$$E = 0.$$

Dans le cas où la conique est une parabole, son paramètre est donné par la relation

$$p^2 = \frac{\Delta_1^2}{-(A_1 + A_1')^3},$$

ce qui donne en coordonnées trilatères

$$p^2 = -\frac{S^2\Delta^2}{R^2E^3}.$$

248. — **Foyers.** — Comme au numéro 221, on aura les coordonnées des foyers en écrivant que l'équation

$$f(U, V, W) - \sigma(U^2 + V^2 + W^2 - 2VW\cos \mathbf{A} - 2WU\cos \mathbf{B} - 2UV\cos \mathbf{C}) = 0 \quad (11)$$

représente deux points. Il suffit pour cela d'annuler le discriminant du premier membre, et on obtient l'équation en σ du numéro précédent,

$$\Delta(\sigma) = F\sigma^2 - E\sigma + \Delta = 0.$$

A chaque racine de cette équation correspondent deux foyers déterminés par l'équation (11).

On voit ainsi que les foyers sont situés sur les axes puisque

les coordonnées de ces droites annulent les dérivées partielles du premier membre de l'équation (11) quand on y remplace σ par une racine de l'équation en σ.

249. Nous terminerons ces considérations en cherchant le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique représentée par l'équation (10).

Les coordonnées des tangentes issues d'un point X, Y, Z à cette conique vérifient les équations

$$UX + VY + WZ = 0,$$

$$f(U, V, W) = 0.$$

En éliminant W entre ces deux équations, on a une équation homogène du second degré en U et V qui peut s'écrire

$$U^2(aZ^2 - 2b'ZX + a''X^2) + 2UV(b''Z^2 - b'YZ - bZX + a''XY) \\ + V^2(a'Z^2 - 2bYZ + a''Y^2) = 0,$$

et en désignant par U, V, W et U', V', W' les racines de l'équation précédente, et remarquant que l'équation en U et V admet pour racines $\frac{U}{V}$ et $\frac{U'}{V'}$, on en déduit

$$\frac{UU'}{a'Z^2 - 2bYZ + a''Y^2} = \frac{UV' + VU'}{-2(b''Z^2 - b'YZ - bZX + a''XY)} \\ = \frac{VV'}{aZ^2 - 2b'ZX + a''X^2}.$$

En éliminant successivement U et V on obtiendrait

$$\frac{VV'}{a''X^2 - 2b'ZX + aZ^2} = \frac{VW' + WV'}{-2(bX^2 - b''ZX - b'XY + aYZ)} \\ = \frac{WW'}{a'X^2 - 2b''XY + aY^2},$$

$$\frac{WW'}{aY^2 - 2b''XY + a'X^2} = \frac{WU' + UW'}{-2(b'Y^2 - bXY - b''YZ + a'ZX)} \\ = \frac{UU'}{a''Y^2 - 2bYZ + a'Z^2}.$$

Or, pour que ces deux droites soient perpendiculaires, on

doit avoir

$$UU' + VV' + WW' - (VW' + WV')\cos \mathbf{A} - (WU' + UW')\cos \mathbf{B} - (UV' + VU')\cos \mathbf{C} = 0\,;$$

en remplaçant UU′, VV′, etc. par les dénominateurs des rapports précédents, on obtient le lieu cherché.

On trouve l'équation

$$(a'+a''+2b\cos \mathbf{A})X^2+(a''+a+2b'\cos \mathbf{B})Y^2+(a+a'+2b''\cos \mathbf{C})Z^2$$
$$+2YZ(a\cos \mathbf{A}-b-b'\cos \mathbf{C}-b''\cos \mathbf{B})$$
$$+2ZX(a'\cos \mathbf{B}-b'-b''\cos \mathbf{A}-b\cos \mathbf{C})$$
$$+2XY(a''\cos \mathbf{C}-b''-b\cos \mathbf{B}-b'\cos \mathbf{A}) = 0.$$

On peut reconnaître que cette équation représente un cercle en l'écrivant sous la forme

$$(X\sin \mathbf{A}+Y\sin \mathbf{B}+Z\sin \mathbf{C})\left(\frac{a'+a''+2b\cos \mathbf{A}}{\sin \mathbf{A}}X+\frac{a''+a+2b'\cos \mathbf{B}}{\sin \mathbf{B}}Y+\frac{a+a'+2b''\cos \mathbf{C}}{\sin \mathbf{C}}Z\right)$$
$$-\frac{F}{\sin \mathbf{A}\sin \mathbf{B}\sin \mathbf{C}}(YZ\sin \mathbf{A}+ZX\sin \mathbf{B}+XY\sin \mathbf{C}) = 0. \quad (12)$$

Or on sait que le cercle circonscrit au triangle de référence a pour équation

$$YZ\sin \mathbf{A} + ZX\sin \mathbf{B} + XY\sin \mathbf{C} = 0\,;$$

on en conclut que l'équation (12) représente un cercle, et l'axe radical de ce cercle et du cercle circonscrit au triangle de référence est

$$\frac{a'+a''+2b\cos \mathbf{A}}{\sin \mathbf{A}}X+\frac{a''+a+2b'\cos \mathbf{B}}{\sin \mathbf{B}}Y+\frac{a+a'+2b''\cos \mathbf{C}}{\sin \mathbf{C}}Z=0. \quad (13)$$

Dans le cas où la conique est une parabole, l'équation (12) représente deux droites dont l'une est la droite de l'infini ; la seconde, représentée par l'équation (13), est la directrice.

250. Si la parabole est inscrite dans le triangle de référence, les coefficients a, a', a'' sont nuls et l'équation de la directrice s'écrit

$$bX\operatorname{cotg} \mathbf{A} + b'Y\operatorname{cotg} \mathbf{B} + b''Z\operatorname{cotg} \mathbf{C} = 0.$$

On a aussi la relation

$$F = 2b\sin \mathbf{B}\sin \mathbf{C} + 2b'\sin \mathbf{C}\sin \mathbf{A} + 2b''\sin \mathbf{A}\sin \mathbf{B} = 0$$

ou

$$\frac{b}{\sin \mathbf{A}} + \frac{b'}{\sin \mathbf{B}} + \frac{b''}{\sin \mathbf{C}} = 0.$$

Cette condition exprime que la directrice passe par le point qui a pour coordonnées $\frac{1}{\cos \mathbf{A}}$, $\frac{1}{\cos \mathbf{B}}$, $\frac{1}{\cos \mathbf{C}}$, c'est-à-dire par le point de concours des hauteurs.

EXERCICES ET NOTES

1. Distance d'un point à une droite.

Soit la droite $$UX + VY + WZ = 0$$

et le point (X_1, Y_1, Z_1).

L'équation de cette droite s'écrit en coordonnées rectangulaires homogènes

$$\begin{aligned}(U(x \cos \lambda + y \sin \lambda - pz) + V(x \cos \mu + y \sin \mu - qz)\\ + W(x \cos \nu + y \sin \nu - rz) = 0,\end{aligned}$$

et par suite, en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées homogènes du point [x_1, y_1, z_1 étant liés à X_1, Y_1, Z_1 par les formules (5)], la distance du point à la droite est

$$\frac{U(x_1\cos\lambda+y_1\sin\lambda-pz_1)+V(x_1\cos\mu+y_1\sin\mu-qz_1)+W(x_1\cos\nu+y_1\sin\nu-rz_1)}{\pm z_1\sqrt{(U\cos\lambda+V\cos\mu+W\cos\nu)^2+(U\sin\lambda+V\sin\mu+W\sin\nu)^2}}$$

ou

$$\frac{UX_1 + VY_1 + WZ_1}{\pm z_1\sqrt{U^2 + V^2 + W^2 - 2VW \cos \mathbf{A} - 2WU \cos \mathbf{B} - 2UV \cos \mathbf{C}}}.$$

En introduisant les coordonnées absolues α_1, β_1, γ_1 du point, on obtient

$$\frac{U\alpha_1 + V\beta_1 + W\gamma_1}{\pm \sqrt{U^2 + V^2 + W^2 - 2VW \cos \mathbf{A} - 2WU \cos \mathbf{B} - 2UV \cos \mathbf{C}}}.$$

2. Il résulte de ce qui précède que l'équation tangentielle d'un cercle de rayon R et dont les coordonnées du centre sont α, β, γ est

$$\begin{aligned}&(U\alpha + V\beta + W\gamma)^2\\ &- R^2(U^2 + V^2 + W^2 - 2VW \cos \mathbf{A} - 2WU \cos \mathbf{B} - 2UV \cos \mathbf{C}) = 0.\end{aligned}$$

3. Distance de deux points. — Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les coordonnées trilatères absolues des deux points ; x_1, y_1 et x_2, y_2 leurs coordonnées rectangulaires.

La distance d des deux points est donnée par la relation

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Or l'équation

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 0 \tag{1}$$

est l'équation des droites isotropes passant par le point x', y'.

De même, en coordonnées trilatères, si l'on pose

$$g(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}) \equiv \mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2 - 2\mathrm{VW} \cos \mathbf{A} - 2\mathrm{WU} \cos \mathbf{B} - 2\mathrm{UV} \cos \mathbf{C},$$

l'équation des droites isotropes passant par le point α', β', γ' sera

$$g(\beta\gamma' - \gamma\beta', \quad \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \quad \alpha\beta' - \beta\alpha') = 0.$$

Si dans cette équation on remplace α, β, γ en fonction de x, y, on aura l'équation (1).

En tenant compte des formules de transformation (9) on pourra écrire

$$g(\beta\gamma' - \gamma\beta', \quad \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \quad \alpha\beta' - \beta\alpha') = \lambda[(x - x')^2 + (y - y')^2], \tag{2}$$

α', β', γ' étant aussi remplacés en fonction de x', y' ; μ est un coefficient *indépendant* de x et de y.

Or les deux membres étant symétriques par rapport à x, y et x', y', il en résulte aussi que λ est indépendant de x' et y'.

On pourra donc écrire

$$d^2 = \frac{1}{\lambda} g(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, \quad \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, \quad \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2),$$

λ étant indépendant des coordonnées des deux points.

Nous déterminerons μ en appliquant cette formule à deux points particuliers, les sommets B et C du triangle de référence, dont la distance est $\mathbf{a}$.

On trouve ainsi

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{16\mathrm{S}^4}{\mathbf{b}^2\mathbf{c}^2};$$

on en déduit

$$\lambda = \frac{\mathrm{S}^2}{\mathrm{R}^2},$$

et par suite la distance cherchée est

$$d^2 = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{S}^2} g(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, \quad \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, \quad \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2).$$

4. Angle des asymptotes d'une conique. — Désignons comme au numéro 247 par

$$f(U, V, W) = aU^2 + a'V^2 + \cdots = 0,$$
$$f_1(u, v, w) = a_1u^2 + a'_1v^2 + \cdots = 0$$

les équations d'une même conique en coordonnées trilatères et en coordonnées homogènes. Si θ désigne l'angle des asymptotes, on a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{4\sqrt{B_1''^2 - A_1A_1'}}{A_1 + A_1'} = \frac{4\sqrt{-a_1''\Delta_1}}{A_1 + A_1'},$$

ou, en tenant compte des formules du même numéro,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{4\sqrt{-\Delta F}}{E}.$$

Si la conique était définie par son équation ponctuelle

$$AX^2 + A'Y^2 + \cdots = 0,$$

son équation tangentielle pourrait s'écrire

$$(A'A'' - B^2)U^2 + (A''A - B'^2)V^2 + \cdots = 0,$$

et en appliquant la formule précédente, on aurait

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{4\sqrt{-\Phi}}{E},$$

en posant

$$\Phi = (A'A'' - B^2)\sin^2 \mathbf{A} + (A''A - B'^2)\sin^2 \mathbf{B} + \cdots,$$
$$E = A + A' + A'' - 2B\cos \mathbf{A} - 2B'\cos \mathbf{B} - 2B''\cos \mathbf{C}.$$

En particulier, ce résultat nous donne l'angle de deux droites définies par une équation ponctuelle quadratique.

Comparez avec le résultat de M. Kœhler, *Exercices de géométrie analytique*, première partie, p. 154.

5. On pourra essayer de résoudre à l'aide des coordonnées trilatères les exercices déjà proposés ou résolus dans les chapitres précédents, notamment en ce qui concerne les coniques inscrites dans un triangle ou conjuguées par rapport à un triangle.

6. *On considère les coniques inscrites à un triangle et telles que les normales aux points de contact soient concourantes. Trouver le lieu de leur point de concours.*

On trouve pour équation du lieu, en prenant le triangle donné pour triangle de référence,

$$X(Y^2 - Z^2)(\cos \mathbf{B}\cos \mathbf{C} - \cos \mathbf{A}) + Y(Z^2 - X^2)(\cos \mathbf{C}\cos \mathbf{A} - \cos \mathbf{B}) + Z(X^2 - Y^2)(\cos \mathbf{A}\cos \mathbf{B} - \cos \mathbf{C}) = 0,$$

qui représente une cubique passant par les sommets du triangle,

par les centres des cercles inscrits et ex-inscrits, par le point de concours des hauteurs, et qui a pour asymptotes les perpendiculaires aux côtés du triangle passant par le centre du cercle circonscrit.

7. *On donne un triangle* ABC *et un point* P *dans son plan.*

1° *Trouver le lieu des centres des coniques* S *inscrites dans le triangle* ABC *et qui sont vues du point* P *sous un angle donné* ω.

2° *Discuter ce lieu en supposant que le point* P *se déplace dans le plan du triangle.*

3° *Démontrer que, si l'angle donné* ω *est droit, toutes les coniques* S *sont aussi vues sous un angle droit d'un autre point* P'. *Montrer que dans ce cas, si le point* P *se déplace, la droite* PP' *passe par un point fixe* I *et que le produit* $IP \times IP'$ *est constant.*

(Agrégation des Sciences mathématiques, 1890.)

Voir une remarquable solution de M. Maluski dans la *Revue de Mathématiques spéciales*, tome I, p. 8.

8. *On donne une conique inscrite dans un triangle* ABC, *et un point* O. *Les droites* OA, OB, OC *rencontrent les côtés du triangle en* A', B', C', *qui constituent les sommets d'un nouveau triangle* A'B'C'. *Par chacun des sommets de ce triangle on mène des tangentes à la conique qui rencontrent les côtés opposés en trois points. Démontrer que ces trois points sont en ligne droite.*

On pourra prendre pour triangle de référence le triangle ABC ou le triangle A'B'C'.

9. *Une conique étant inscrite à un triangle, si l'on désigne par* P *le produit de ses demi-axes et par* α, β, γ *les distances du centre de la conique aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle, on a la relation*

$$P^2 = 4R\alpha\beta\gamma.$$

(Steiner.)

Prenons le triangle pour triangle de référence; l'équation tangentielle de la conique sera

$$f(U, V, W) = 2bVW + 2b'WU + 2b''UV = 0,$$

et le carré du produit des demi-axes sera

$$P^2 = \frac{S^4\Delta}{R^4F^3},$$

où l'on a

$$\Delta = 2bb'b'',$$

$$F = 2b \sin \mathbf{B} \sin \mathbf{C} + 2b' \sin \mathbf{C} \sin \mathbf{A} + 2b'' \sin \mathbf{A} \sin \mathbf{B}.$$

D'autre part les coordonnées du centre de la conique sont

$$b'' \sin \mathbf{B} + b' \sin \mathbf{C}, \qquad b'' \sin \mathbf{A} + b \sin \mathbf{C}, \qquad b' \sin \mathbf{A} + b \sin \mathbf{B};$$

on en déduit les coordonnées absolues en les multipliant par le facteur $\frac{S}{FR}$.

Or l'équation de la droite qui joint les milieux de AB et de AC est

$$X \sin \mathbf{A} - Y \sin \mathbf{B} - Z \sin \mathbf{C} = 0;$$

on en conclut que la distance du centre à cette droite est, toutes réductions faites (*Ex.* 1), au signe près,

$$\alpha = \frac{Sb \sin \mathbf{B} \sin \mathbf{C}}{FR \sin \mathbf{A}}.$$

On aura de même

$$\beta = \frac{Sb' \sin \mathbf{C} \sin \mathbf{A}}{FR \sin \mathbf{B}}, \qquad \gamma = \frac{Sb'' \sin \mathbf{A} \sin \mathbf{B}}{FR \sin \mathbf{C}};$$

on en déduit

$$\alpha\beta\gamma = \frac{S^3 bb'b'' \sin \mathbf{A} \sin \mathbf{B} \sin \mathbf{C}}{F^3R^3},$$

et comme

$$\sin \mathbf{A} \sin \mathbf{B} \sin \mathbf{C} = \frac{S}{2R^2},$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{S^4 bb'b''}{2F^3R^5} = \frac{S^4\Delta}{4F^3R^5} = \frac{P^2}{4R},$$

et le théorème est démontré.

10. *Lieu des pôles d'une droite par rapport aux coniques inscrites dans un triangle et passant par un point donné.*

Cas où la droite est à l'infini.

Si l'on prend le triangle pour triangle de référence, l'équation générale des coniques est

$$2bVW + 2b'WU + 2b''UV = 0,$$

et pour écrire que cette conique passe par le point donné (α, β, γ), on écrit que son équation ponctuelle est vérifiée par les coordonnées de ce point, ce qui donne

$$b^2\alpha^2 + b'^2\beta^2 + b''^2\gamma^2 - 2b'b''\beta\gamma - 2b''b\gamma\alpha - 2bb'\alpha\beta = 0.$$

11. *Il existe une infinité de coniques conjuguées par rapport à un triangle et tangentes à une droite. Démontrer que toutes ces coniques sont tangentes à quatre droites fixes.*

L'équation générale des coniques conjuguées par rapport au

triangle de référence est

$$aU^2 + a'V^2 + a''W^2 = 0.$$

Si on écrit que cette conique touche la droite (u_0, v_0, w_0), on a

$$au_0^2 + a'v_0^2 + a''w_0^2 = 0,$$

équation qui exprime aussi que la conique touche les trois droites $(-u_0, v_0, w_0)$, $(u_0, -v_0, w_0)$ et $(u_0, v_0, -w_0)$.

Théorème corrélatif.

12. *On considère des coniques inscrites dans un triangle* ABC *et vues d'un point fixe sous un angle droit. Enveloppe des côtés du triangle polaire de* ABC.

13. *On donne un triangle* ABC, *une droite* Δ *et une conique tangente à cette droite. Par le point* α *où la droite* Δ *rencontre le côté* BC *on mène une tangente à la conique qui rencontre en* A′ *et en* A″ *les tangentes issues du point* A *à cette même conique. Opérant de même pour les deux autres côtés, on obtient six points* A′, A″, B′, B″, C′, C″. *Démontrer que ces six points sont sur une conique circonscrite au triangle* ABC.

Soit
$$f(U, V, W) = aU^2 + a'V^2 + \ldots. = 0$$
l'équation de la conique, ABC étant le triangle de référence, et u_0, v_0, w_0 les coordonnées de la droite Δ, avec la condition

$$f(u_0, v_0, w_0) = 0\,; \qquad (1)$$

la seconde tangente issue du point α à la conique a pour coordonnées $u_0 - \frac{f'_{u_0}}{a}$, v_0, w_0, et la conique passant par les cinq points A, B, C, A′, A″ a pour équation ponctuelle

$$a'Z^2 + a''Y^2 - 2bYZ - \left(\frac{a''Y}{v_0} + \frac{a'Z}{w_0}\right)\left[\left(u_0 - \frac{f'_{u_0}}{a}\right)X + v_0Y + w_0Z\right] = 0.$$

Cette équation peut encore s'écrire, en tenant compte de (1),

$$au_0YZ + a'v_0ZX + a''w_0XY = 0,$$

et comme cette équation est symétrique, le théorème est démontré.

14. *Soient* δ, δ', δ'' *les distances du centre d'une conique à trois tangentes, et* ρ, ρ', ρ'' *les distances de ce centre aux points de contact; on a*

$$\delta^2\rho^2(\delta'^2 - \delta''^2) + \delta'^2\rho'^2(\delta''^2 - \delta^2) + \delta''^2\rho''^2(\delta^2 - \delta'^2) = 0.$$

15. *On donne un triangle* ABC, *une conique et un point* O *sur cette conique. Les droites* OA, OB, OC *coupent la conique respective-*

ment aux points A′, B′, C′. *De plus, le côté* BC *rencontre cette conique aux points* A″, A‴ ; *le côté* AC *aux points* B″, B‴ *et le côté* AB *aux points* C″, C‴. *Démontrer que les triangles* A′A″A‴, B′B″B‴, C′C″C‴ *sont circonscrits à une même conique.*

16. *Par les sommets* A, B, C *d'un triangle inscrit dans une conique, on mène à la courbe des tangentes qui rencontrent les côtés opposés en* A′, B′, C′ ; *les milieux de* AA′, BB′, CC′ *sont en ligne droite.*

On peut prendre pour triangle de référence le triangle circonscrit à la conique aux points A, B, C.

17. Nous avons défini d'une manière purement analytique les coordonnées trilatères d'un point par les formules

$$\left.\begin{aligned} X &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ Y &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ Z &= a_3x + b_3y + c_3z\,; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

nous en avons déduit les coordonnées trilatères U, V, W d'une droite définies comme coefficients de X, Y, Z dans l'équation de cette droite, et nous avons montré que ces coordonnées U, V, W étaient liées aux coordonnées homogènes u, v, w de la droite par les relations

$$\left.\begin{aligned} U &= A_1u + B_1v + C_1w, \\ V &= A_2u + B_2v + C_2w, \\ W &= A_3u + B_3v + C_3w, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

A_1, B_1,..... désignant les coefficients de a_1, b_1,... dans le développement du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

On peut interpréter géométriquement ces nouvelles coordonnées de points et de droites.

Soient x, y, z les coordonnées homogènes d'un point M, les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires.

Désignons par p_1, p_2, p_3 les distances de ce point aux trois côtés BC, CA, AB du triangle de référence ABC, ces distances étant précédées du signe $+$ ou du signe $-$, selon que le point M est situé dans la région positive ou négative du côté correspondant. On peut d'ailleurs supposer que les équations de ces côtés sont écrites de telle

manière que tout point de l'intérieur du triangle soit dans la région positive des trois côtés.

Nous dirons que les nombres p_1, p_2, p_3 sont les coordonnées trilatères *absolues* du point M.

On aura les formules

$$p_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1z}{z\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

$$p_2 = \frac{a_2x + b_2y + c_2z}{z\sqrt{a_2^2 + b_2^2}},$$

$$p_3 = \frac{a_3x + b_3y + c_3z}{z\sqrt{a_3^2 + b_3^2}},$$

et les relations (1) peuvent s'écrire

$$\rho X = p_1\sqrt{a_1^2 + b_1^2},$$

$$\rho Y = p_2\sqrt{a_2^2 + b_2^2},$$

$$\rho Z = p_3\sqrt{a_3^2 + b_3^2},$$

ρ désignant un nombre arbitraire.

On voit ainsi que les coordonnées trilatères du point M sont proportionnelles aux produits des coordonnées absolues de ce point par des nombres fixes.

De même, étant donnée une droite Δ, ayant pour coordonnées homogènes u, v, w, désignons par q_1, q_2, q_3 les distances des points A, B, C à cette droite, ces distances étant précédées d'un signe déterminé par la convention suivante :

Deux distances ont le même signe ou des signes différents selon que les deux points correspondants sont d'un même côté ou non de la droite.

Nous dirons que les nombres q_1, q_2, q_3 sont les coordonnées trilatères *absolues* de la droite Δ.

Comme les coordonnées homogènes des sommets A, B, C du triangle de référence sont respectivement (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_3), on aura

$$q_1 = \frac{A_1u + B_1v + C_1w}{C_1\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$q_2 = \frac{A_2u + B_2v + C_2w}{C_2\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$q_3 = \frac{A_3u + B_3v + C_3w}{C_3\sqrt{u^2 + v^2}},$$

et les formules (3) peuvent s'écrire

$$\sigma U = q_1 C_1,$$
$$\sigma V = q_2 C_2,$$
$$\sigma W = q_3 C_3,$$

σ étant un nombre arbitraire.

On voit ainsi que les coordonnées trilatères d'une droite sont proportionnelles aux produits des coordonnées absolues de cette droite par des nombres fixes.

Inversement, on peut définir d'une manière purement géométrique les coordonnées trilatères d'un point et d'une droite, indépendamment de tout autre système de coordonnées.

Soit un triangle ABC ; désignons par p_1, p_2, p_3 les distances d'un point M du plan aux côtés BC, CA, AB, ces distances étant précédées du signe $+$ ou du signe $-$ selon que le point M est, par rapport au côté correspondant, dans la même région que le sommet opposé ; nous appellerons coordonnées trilatères du point M les nombres X, Y, Z définis par les relations

$$\rho X = k_1 p_1,$$
$$\rho Y = k_2 p_2,$$
$$\rho Z = k_3 p_3,$$

k_1, k_2, k_3 étant des nombres fixes et arbitrairement choisis, ρ ayant une valeur quelconque.

Si l'on se donne des valeurs de X, Y, Z, il n'existe qu'un seul point correspondant.

De même, étant donnée une droite, désignons par q_1, q_2, q_3 les distances (affectées de signe, comme on l'a vu plus haut) des sommets du triangle ABC à cette droite ; nous appellerons coordonnées trilatères de la droite, les quantités U, V, W, définies par les relations

$$\sigma U = h_1 q_1,$$
$$\sigma V = h_2 q_2,$$
$$\sigma W = h_3 q_3,$$

h_1, h_2, h_3 étant des nombres fixes et arbitrairement choisis, σ ayant une valeur quelconque.

Si l'on se donne des valeurs de U, V, W, il n'existe qu'une seule droite correspondante.

Étant ainsi en possession des coordonnées de points et de droites, il importe de chercher la relation qui doit exister entre les coordonnées d'un point et celles d'une droite pour que le point soit sur la droite ; autrement dit, il faut chercher l'équation ponctuelle de la droite et l'équation tangentielle du point.

En tenant compte des valeurs précédemment calculées de $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ et en désignant par x, y, z, u, v, w les coordonnées homogènes du point et de la droite, les relations qui précèdent peuvent s'écrire

$$a_1x + b_1y + c_1z = \rho' \frac{X\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{k_1},$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = \rho' \frac{Y\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{k_2},$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = \rho' \frac{Z\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}{k_3},$$

$$A_1u + B_1v + C_1w = \sigma' \frac{UC_1}{h_1},$$

$$A_2u + B_2v + C_2w = \sigma' \frac{VC_2}{h_2},$$

$$A_3u + B_3v + C_3w = \sigma' \frac{WC_3}{h_3}.$$

On voit aisément que

$$\sum_{i=1}^{i=3} (a_ix + b_iy + c_iz)(A_iu + B_iv + C_iw) = D(ux + vy + wz);$$

il en résulte la relation

$$D(ux + vy + wz) = \rho'\sigma' \left[\frac{UXC_1\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{h_1k_1} + \frac{VYC_2\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{h_2k_2} + \frac{WZC_3\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}{h_3k_3}\right],$$

et par conséquent, la condition pour que le point soit sur la droite est

$$UX\frac{C_1\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{h_1k_1} + VY\frac{C_2\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{h_2k_2} + WZ\frac{C_3\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}{h_3k_3} = 0.$$

Mais si l'on veut que l'équation de la droite ait la forme simple

$$UX + VY + WZ = 0,$$

qui ne change pas quand on permute les coordonnées de droites et de points, il faut choisir les nombres $k_1, k_2, k_3, h_1, h_2, h_3$ de telle manière que l'on ait

$$\frac{C_1\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{h_1k_1} = \frac{C_2\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{h_2k_2} = \frac{C_3\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}{h_3k_3}.$$

Dans les applications que nous avons faites des coordonnées trilatères, nous nous sommes donné les nombres k_1, k_2, k_3 ; nous avons

pris

$$k_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \qquad k_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \qquad k_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2}\ ;$$

il en résulte alors pour les nombres h_1, h_2, h_3 les valeurs

$$\frac{h_1}{C_1} = \frac{h_2}{C_2} = \frac{h_3}{C_3}.$$

Quand on étudie les propriétés métriques des figures, on détermine les coefficients des équations des côtés du triangle de référence de façon qu'on ait

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 1\ ;$$

on a alors

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1,$$

et

$$\frac{h_1}{\sin \mathbf{A}} = \frac{h_2}{\sin \mathbf{B}} = \frac{h_3}{\sin \mathbf{C}}.$$

Les coordonnées trilatères du point sont proportionnelles aux coordonnées absolues, et les coordonnées trilatères de la droite sont proportionnelles aux produits des coordonnées absolues par les sinus des angles du triangle.

Rien n'empêcherait de choisir d'abord les nombres h_1, h_2, h_3, de supposer par exemple

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1,$$

afin que les coordonnées trilatères de la droite soient proportionnelles aux coordonnées absolues q_1, q_2, q_3.

On devrait alors choisir k_1, k_2, k_3 de telle manière que l'on ait

$$\frac{k_1}{C_1\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{k_2}{C_2\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{k_3}{C_3\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}.$$

Il est clair que dans cette hypothèse, les formules relatives aux propriétés métriques des figures ne seraient plus les mêmes.

Il eût été peut-être plus logique, dans une étude des coordonnées tangentielles, d'adopter cette manière de voir ; nous avons préféré la première pour ne pas modifier les formules relatives aux coordonnées ponctuelles qui sont souvent employées.

18. De même que les coordonnées trilatères absolues d'un point vérifient la relation

$$\mathbf{a}p_1 + \mathbf{b}p_2 + \mathbf{c}p_3 = 2S,$$

les coordonnées trilatères absolues d'une droite vérifient une relation plus compliquée qu'on peut obtenir de la manière suivante :

Désignons par A′, B′, C′ les projections des sommets du triangle de référence sur la droite Δ ; on aura entre les longueurs B′C′, C′A′, A′B′ une relation de la forme

$$B'C' \pm C'A' \pm A'B' = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\sqrt{a^2 - (q_2 - q_3)^2} \pm \sqrt{b^2 - (q_3 - q_1)^2} \pm \sqrt{c^2 - (q_1 - q_2)^2} = 0. \qquad (1)$$

Pour rendre cette relation rationnelle, nous nous appuierons sur la formule connue

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2) = \\ -(\alpha + \beta + \gamma)(-\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma). \qquad (2)$$

En prenant dans la formule (1) les radicaux avec les quatre combinaisons de signes possibles, et faisant le produit des expressions obtenues, on a d'après la formule (2)

$$[a^2 - (q_2 - q_3)^2]^2 + [b^2 - (q_3 - q_1)^2]^2 + [c^2 - (q_1 - q_2)^2]^2 \\ - 2[[b^2 - (q_3 - q_1)^2][c^2 - (q_1 - q_2)^2] + [c^2 - (q_1 - q_2)^2][a^2 - (q_2 - q_3)^2] \\ + [a^2 - (q_2 - q_3)^2][b^2 - (q_3 - q_1)^2]] = 0. \qquad (3)$$

Les termes du quatrième degré en q_1, q_2, q_3 peuvent s'écrire

$$(q_2 - q_3)^4 + (q_3 - q_1)^4 + (q_1 - q_2)^4 \\ - 2[(q_3 - q_1)^2(q_1 - q_2)^2 + (q_1 - q_2)^2(q_2 - q_3)^2 + (q_2 - q_3)^2(q_3 - q_1)^2],$$

expression qui se déduit du premier membre de (2) en posant

$$\alpha = q_2 - q_3, \qquad \beta = q_3 - q_1, \qquad \gamma = q_1 - q_2;$$

comme on a

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

il en résulte que le deuxième membre est nul, il en est de même de cette expression.

La relation (3) peut alors s'écrire

$$2(q_2 - q_3)^2(b^2 + c^2 - a^2) + 2(q_3 - q_1)^2(c^2 + a^2 - b^2) \\ + 2(q_1 - q_2)^2(a^2 + b^2 - c^2) + a^4 + b^4 + c^4 - 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 0$$

ou encore, en remarquant que

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = -16S^2,$$

d'après la formule (2),

$$a^2q_1^2 + b^2q_2^2 + c^2q_3^2 - q_2q_3(b^2 + c^2 - a^2) - q_3q_1(c^2 + a^2 - b^2) \\ - q_1q_2(a^2 + b^2 - c^2) = 4S^2$$

ou encore

$$a^2q_1^2 + b^2q_2^2 + c^2q_3^2 - 2bcq_2q_3 \cos A - 2caq_3q_1 \cos B - 2abq_1q_2 \cos C = 4S^2;$$

c'est la relation cherchée.

CHAPITRE XIV

PROPRIÉTÉS DE DEUX ET DE TROIS CONIQUES

---

251. Étant données les équations de deux coniques en coordonnées rectilignes ou trilatères

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0, \quad (C)$$

$$f_1(u, v, w) = a_1u^2 + a_1'v^2 + a_1''w^2 + 2b_1vw + 2b_1'wu + 2b_1''uv = 0, \quad (C_1)$$

l'équation générale des coniques inscrites dans le quadrilatère Q des tangentes communes est

$$f + \lambda f_1 = 0.$$

Donnons à λ deux valeurs égales et de signes contraires μ et $-\mu$; on obtient deux coniques

$$f + \mu f_1 = 0, \qquad (C')$$

$$f - \mu f_1 = 0, \qquad (C'_1)$$

et il est aisé de montrer que les pôles d'une droite quelconque par rapport aux quatre coniques C, C_1, C', C_1 [pôles situés en ligne droite (187)] sont quatre points conjugués harmoniques.

Soient en effet

$$P = uf'_{u_0} + vf'_{v_0} + wf'_{w_0} = 0,$$

$$P_1 = uf'_{1u_0} + vf'_{1v_0} + wf'_{1w_0} = 0$$

les équations des pôles de la droite (u_0, v_0, w_0) par rapport aux coniques C et C_1.

Les pôles de cette même droite par rapport aux deux autres

coniques auront pour équations

$$P + \mu P_1 = 0,$$

$$P - \mu P_1 = 0,$$

et l'on voit que ces deux points divisent harmoniquement les points P et P_1.

En particulier les points de contact de ces coniques avec un côté du quadrilatère Q forment une division harmonique.

On dit dans ce cas que les coniques C' et C'_1 sont conjuguées harmoniques par rapport aux coniques C et C_1, et l'on voit sans peine que, réciproquement, les coniques C et C_1 sont conjuguées harmoniques par rapport à C' et C'_1.

En outre, il est à peine utile de faire observer que cette propriété est indépendante du triangle de référence ou des axes de coordonnées.

252. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que quatre coniques soient conjuguées harmoniques est que les tangentes menées à deux des coniques conjuguées par un point commun aux deux autres coniques forment un faisceau harmonique.*

Prenons pour origine un point commun aux deux coniques C et C_1, et pour axes les tangentes en ce point à ces deux coniques ; leurs équations pourront alors s'écrire

$$f = u^2 + 2bvw + 2b'wu + a''w^2 = 0,$$

$$f_1 = v^2 + 2b_1vw + 2b'_1wu + a''_1w^2 = 0.$$

Considérons maintenant deux coniques inscrites dans le quadrilatère des tangentes communes à C et à C_1,

$$f + \lambda f_1 = 0, \qquad (C')$$

$$f + \mu f_1 = 0. \qquad (C'_1)$$

Les tangentes menées de l'origine à ces deux coniques sont déterminées par les équations

$$u^2 + \lambda v^2 = 0,$$

$$u^2 + \mu v^2 = 0;$$

et l'on voit aisément que pour que ces droites forment un faisceau harmonique, il faut et il suffit que

$$+\lambda\mu = 0,$$

c'est-à-dire que les coniques C' et C'_1 soient conjuguées harmoniques par rapport à C et à C_1. Le théorème est démontré.

253. Revenons à l'équation générale

$$f + \lambda f_1 = 0 \tag{1}$$

des coniques inscrites dans le quadrilatère Q des tangentes communes aux coniques C et C_1,

$$f(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0, \quad (C)$$

$$f_1(u, v, w) = a_1u^2 + a'_1v^2 + a''_1w^2 + 2b_1vw + 2b'_1wu + 2b''_1uv = 0. \quad (C_1)$$

L'équation ponctuelle de la conique qui a pour équation tangentielle l'équation (1) est

$$\begin{vmatrix} a+\lambda a_1 & b''+\lambda b''_1 & b'+\lambda b'_1 & x \\ b''+\lambda b''_1 & a'+\lambda a'_1 & b+\lambda b_1 & y \\ b'+\lambda b'_1 & b+\lambda b_1 & a''+\lambda a''_1 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant,

$$\lambda^2 F_1(x, y, z) + \lambda\Phi(x, y, z) + F(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

où nous posons

$$F(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

$$F_1(x, y, z) = A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy,$$

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) = {} & (a'a''_1 + a''a'_1 - 2bb_1)x^2 + (a''a_1 + aa''_1 - 2b'b'_1)y^2 \\ & + (aa'_1 + a'a_1 - 2b''b''_1)z^2 + 2(b'b''_1 + b''b'_1 - ab_1 - ba_1)yz \\ & + 2(b''b_1 + bb''_1 - a'b'_1 - b'a'_1)zx + 2(bb'_1 + b'b_1 - a''b''_1 - b''a''_1)xy.\end{aligned}$$

Les équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0$$

sont les équations ponctuelles des coniques C et C_1.

Nous allons étudier la conique Σ qui a pour équation

$$\Phi(x, y, z) = 0. \tag{Σ}$$

Les équations (1) et (2) sont les équations tangentielle et ponctuelle d'une même conique; on peut donc considérer l'équation (2) comme exprimant la condition pour que le point (x, y, z) soit situé sur la conique (1); en d'autres termes, si l'on résout l'équation (2) par rapport à λ, et si l'on transporte les racines dans l'équation (1), on obtient les équations des coniques du faisceau (1) qui passent par le point (x, y, z).

Il en résulte que l'équation

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

est le lieu des points par lesquels passent deux coniques du faisceau (1) conjuguées harmoniques par rapport aux coniques C et C_1 ou, d'après le théorème précédent (252), cette conique Σ est le lieu des points tels que les tangentes issues de ces points aux coniques C et C_1 forment un faisceau harmonique.

Il est aisé de voir que cette conique est conjuguée par rapport au triangle conjugué commun aux coniques C et C_1.

En effet, si l'on prend ce triangle pour triangle de référence, les équations de C et de C_1 peuvent s'écrire

$$au^2 + a'v^2 + a''w^2 = 0,$$

$$a_1u^2 + a'_1v^2 + a''_1w^2 = 0,$$

et la conique Σ a pour équation ponctuelle

$$(a'a''_1 + a''a'_1)x^2 + (a''a_1 + aa''_1)y^2 + (aa'_1 + a'a_1)z^2 = 0,$$

et par suite, pour équation tangentielle

$$\frac{u^2}{a'a''_1 + a''a'_1} + \frac{v^2}{a''a_1 + aa''_1} + \frac{w^2}{aa'_1 + a'a_1} = 0.$$

Les points de contact des tangentes communes aux deux coniques C et C_1 sont visiblement des points du lieu; il en résulte le théorème suivant :

Les huit points de contact des tangentes communes à deux coniques sont sur une conique.

254. Si l'on suppose que la conique C_1 se réduise à deux points A et B, la conique Σ est le lieu du point M tel que les

tangentes issues de ce point à la conique C soient conjuguées harmoniques par rapport à MA et MB.

Si en particulier les points A et B sont les points cycliques, la conique Σ se réduit au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique C.

On retrouve ainsi fort simplement l'équation obtenue au numéro 249 en supposant que

$$f_1(u, v, w) \equiv u^2 + v^2 + w^2 - 2vw \cos A - 2wu \cos B - 2uv \cos C.$$

255. En écrivant que l'équation (2) a ses racines égales, on obtient l'équation

$$\Phi^2 - 4FF_1 = 0,$$

qui représente l'enveloppe des coniques inscrites dans le quadrilatère Q, c'est-à-dire les côtés de ce quadrilatère Q luimême.

Nous obtenons ainsi l'équation de l'ensemble des quatre tangentes communes aux coniques C et C_1.

256. *Corrélativement*, étant données les équations ponctuelles de deux coniques,

$$F = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

$$F_1 = A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy = 0,$$

l'enveloppe des droites qui rencontrent ces coniques en quatre points conjugués harmoniques est une conique qui a pour équation tangentielle

$$\begin{aligned}\varphi(u, v, w) = {} & (A'A''_1 + A''A'_1 - 2BB_1)u^2 + (A''A_1 + AA''_1 - 2B'B'_1)v^2 \\ & + (AA'_1 + A'A_1 - 2B''B''_1)w^2 + 2(B'B''_1 + B''B'_1 - AB_1 - BA_1)vw \\ & + 2(B''B_1 + BB''_1 - A'B'_1 - B'A'_1)wu \\ & + 2(BB'_1 + B'B_1 - A''B''_1 - B''A''_1)uv = 0. \qquad (3)\end{aligned}$$

Cette conique est conjuguée par rapport au triangle conjugué commun aux deux coniques et elle touche les huit tangentes menées aux deux coniques en leurs points communs, d'où l'on déduit le théorème suivant :

Les huit tangentes à deux coniques en leurs points d'intersection sont tangentes à une même conique.

Dans le cas particulier où les coniques données sont des cercles, elles ont comme points communs les points cycliques, les tangentes passent par les centres ; il en résulte que la conique (3) est tangente aux droites isotropes issues des centres des cercles, c'est-à-dire a pour foyers ces centres.

On peut le voir analytiquement en prenant pour axes la droite joignant les centres et une perpendiculaire au milieu ; les équations des cercles sont

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - R^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - R'^2 = 0,$$

et la conique enveloppe a pour équation tangentielle

$$(2a^2 - R^2 - R'^2)u^2 + (4a^2 - R^2 - R'^2)v^2 + 2w^2 = 0,$$

conique qui a pour foyers les points $(\pm a, 0)$.

En désignant par d la distance des centres, l'équation précédente peut s'écrire

$$[d^2 - 2(R^2 + R'^2)]u^2 + 2[d^2 - (R^2 + R'^2)]v^2 + 4w^2 = 0.$$

On reconnaît que l'enveloppe n'est réelle que si

$$d^2 - 2(R^2 + R'^2) < 0.$$

Si $d^2 < R^2 + R'^2$, l'enveloppe est une ellipse ;
Si $d^2 > R^2 + R'^2$, l'enveloppe est une hyperbole;
enfin dans le cas où $d^2 = R^2 + R'^2$, c'est-à-dire si les deux cercles sont orthogonaux, l'enveloppe se réduit aux deux centres, résultat qui est d'ailleurs fort connu.

Enfin si l'on désigne par

$$f(u, v, w) = (A'A'' - B^2)u^2 + \cdots = 0,$$

$$f_1(u, v, w) = (A'_1A''_1 - B_1^2)u^2 + \cdots = 0$$

les équations tangentielles des deux coniques, l'équation

$$\varphi^2 - 4ff_1 = 0$$

est l'équation tangentielle des quatre points de rencontre de ces deux courbes.

257. Coniques harmoniquement inscrites et circonscrites. Soient deux coniques déterminées, l'une par son équation

ponctuelle et l'autre par son équation tangentielle,

$$f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0. \quad (S)$$

$$\varphi(u, v, w) = \alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2\beta' wu + 2\beta'' uv = 0; \quad (C)$$

posons

$$\Theta = a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + 2b\beta + 2b'\beta' + 2b''\beta'',$$

et cherchons à interpréter géométriquement la condition

$$\Theta = 0. \quad (4)$$

Cette interprétation est immédiate dans les cas particuliers suivants :

1° Si la conique C se compose de deux points, la condition (4) exprime que ces deux points sont conjugués par rapport à S.

En particulier, si ces deux points sont les points cycliques, la condition exprime que la conique S est une hyperbole équilatère.

Si ces deux points sont confondus, la condition exprime que ce point double est situé sur la conique S.

2° Si la conique S se compose de deux droites, la condition (4) exprime que ces deux droites sont conjuguées par rapport à la conique C.

Si ces deux droites sont confondues, la condition exprime que cette droite double est tangente à la conique C.

258. [1] Si la condition (4) est remplie, nous dirons que la conique S est harmoniquement circonscrite à C, et que la conique C est harmoniquement inscrite à S.

On verra plus loin les raisons de cette dénomination.

Théorème. — *Dans un faisceau ponctuel de coniques il en existe en général une seule qui soit harmoniquement circonscrite à une conique donnée ; s'il y en a deux, toutes le sont.*

Si l'on suppose en effet que les coefficients de $f(x, y, z)$ soient fonctions linéaires d'un paramètre λ, l'équation (4) est

---

(1) Les considérations présentées aux numéros 258, 259 et 260 sont empruntées aux conférences faites par M. Darboux à l'école normale.

du premier degré en λ et admet en général une seule solution, à moins qu'elle ne soit identiquement satisfaite.

THÉORÈME CORRÉLATIF. — *Dans un faisceau tangentiel de coniques, il en existe en général une seule qui soit harmoniquement inscrite à une conique donnée ; s'il y en a deux, toutes le sont.*

La démonstration est immédiate.

259. Voici quelques conséquences fort simples de ces théorèmes.

1° Supposons que la conique S soit harmoniquement circonscrite à C ; soient HK et MN deux cordes de S conjuguées par rapport à C ; toutes les coniques passant par les quatre points H, K, M, N seront harmoniquement circonscrites à C, puisque dans ce faisceau de coniques la conique S et l'ensemble des droites HK et MN jouissent de cette propriété. Il en résulte que les couples de droites HM, KN et HN, KM seront conjugués par rapport à C.

Supposons, comme cas particulier, que la conique C se réduise aux points cycliques : S est alors une hyperbole équilatère, HK et MN sont perpendiculaires ; il en résulte que HM est perpendiculaire à KN, HN à KM ; ce qui démontre une propriété bien connue de l'hyperbole équilatère.

2° Soient maintenant deux couples de points A, A′ et B, B′ conjugués par rapport à une conique S ; ces ensembles de points constituent deux coniques harmoniquement inscrites à S ; il en sera de même de toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère ABA′B′, en particulier les deux points de rencontre des droites AB, A′B′ et AB′, A′B seront conjugués par rapport à la conique S.

Nous obtenons ainsi une démonstration du théorème de HESSE déjà établi au numéro 238.

260. THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* S *soit harmoniquement circonscrite à* C *est qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans* S *et conjugués par rapport à* C.

1° La condition est nécessaire. Supposons que S soit har-

moniquement circonscrite à C. Soit P un point quelconque de la conique S ; prenons sa polaire par rapport à C, et désignons par Q et R les points de rencontre de cette polaire et de la conique S. Je dis que le triangle PQR est conjugué par rapport à C. En effet, par le point P menons une droite quelconque PP′, qui rencontre la conique S au point P′. Le faisceau ponctuel des coniques qui passent par les quatre points P, Q, R, P′ contient deux coniques, la conique S et l'ensemble des deux droites QR et PP′, qui sont harmoniquement circonscrites à C ; donc toutes les coniques de ce faisceau le sont également, en particulier l'ensemble de droites PR et QP′ ; ces deux droites sont donc conjuguées par rapport à C, et comme le point P′ est un point arbitraire de la conique S, il en résulte que le point Q est le pôle de la droite PR par rapport à la conique C, et le triangle PQR est conjugué par rapport à cette conique.

2° La condition est suffisante. Soit PQR un triangle conjugué quelconque par rapport à C ; je dis que toute conique S circonscrite à ce triangle est harmoniquement circonscrite à C. En effet, prenons un point arbitraire P′ sur la conique S ; le faisceau ponctuel des coniques qui passent par les quatre points P, Q, R, P′ contient deux coniques, les ensembles de droites PP′, QR et QP′, PR, qui sont harmoniquement circonscrites à C ; il en résulte que toutes les coniques du faisceau, et en particulier la conique S, sont harmoniquement circonscrites à C.

On voit ainsi qu'une conique harmoniquement circonscrite à une conique donnée est circonscrite à une infinité de triangles conjugués par rapport à cette seconde conique.

Corrélativement, on peut énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que C *soit harmoniquement inscrite à* S *est qu'il existe une infinité de triangles circonscrits à* C *et conjugués par rapport à* S.

Ce qui revient à dire que C est inscrit à une infinité de triangles conjugués par rapport à S.

261. Application. THÉORÈME (FAURE). — *Les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique coupent orthogonalement le cercle orthoptique.*

Soient

$$S = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$
$$C = a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$$

les équations d'un cercle et d'une ellipse ; pour que le cercle soit harmoniquement circonscrit à l'ellipse, il faut qu'on ait

$$a^2 + b^2 - \gamma = 0,$$

ce qui montre que la puissance du centre de l'ellipse par rapport au cercle est égale à $a^2 + b^2$, carré du rayon du cercle orthoptique ; le théorème est démontré.

Si cette condition est remplie, l'ellipse est harmoniquement inscrite au cercle ; il en résulte le théorème suivant :

Une conique étant inscrite à un triangle, la puissance de son centre par rapport au cercle conjugué du triangle est égale à $a^2 + b^2$.

262. THÉORÈME DE STEINER. — *Le lieu des centres des coniques inscrites à un triangle pour lesquelles la somme des carrés des axes est constante est un cercle ayant pour centre le point de concours des hauteurs du triangle.*

D'après ce qui précède, les centres de ces coniques ont même puissance par rapport au cercle conjugué au triangle qui a pour centre le point de concours des hauteurs. Il en résulte que le lieu est un cercle concentrique au cercle conjugué.

C'est le cercle conjugué lui-même qui constitue le lieu dans le cas où la somme des carrés des axes est nulle, c'est-à-dire si les coniques sont des hyperboles équilatères.

263. Le cercle orthoptique d'une conique a pour limite la directrice si cette conique se transforme en une parabole ; les théorèmes du numéro 261 peuvent alors s'énoncer :

Les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une parabole ont leurs centres sur la directrice.

Les cercles conjugués par rapport aux triangles circonscrits à une parabole ont leurs centres sur la directrice, autrement dit, le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice.

264. Soit PQR un triangle conjugué par rapport à une conique S, j'inscris une conique quelconque C dans le triangle PQR ; il existe alors un triangle inscrit dans S et conjugué par rapport à C.

Supposons que Q et R soient les points cycliques. S est une hyperbole équilatère de centre P, C est une parabole de foyer P ; il en résulte que le foyer d'une parabole conjuguée par rapport à un triangle coïncide avec le centre d'une hyperbole équilatère circonscrite à ce triangle.

On en conclut que le lieu des foyers des paraboles conjuguées par rapport à un triangle coïncide avec le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites au même triangle ; ce lieu commun est le cercle des neuf points.

265. A l'aide des considérations précédentes, on peut établir simplement le théorème du numéro 112, à savoir que si les triangles abc et $a'b'c'$ sont conjugués par rapport à une même conique S, leurs six sommets sont sur une conique.

En effet, soit C la conique qui passe par les points a, b, c, a', b' ; cette conique est harmoniquement circonscrite à S, donc la polaire de a' par rapport à S rencontre la conique C au point b' et en un autre point c'_1 tel que le triangle $a'b'c'_1$ soit conjugué par rapport à S. Il en résulte que c'_1 coïncide avec c'.

266. Réseaux tangentiels. — Étant données les équations tangentielles de trois coniques

$$f_1(u, v, w) = 0, \quad f_2(u, v, w) = 0, \quad f_3(u, v, w) = 0,$$

on appelle réseau tangentiel relatif à ces trois coniques l'ensemble des coniques définies par l'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0, \tag{5}$$

où λ_1, λ_2, λ_3 désignent des nombres arbitraires.

Si l'on se donne une relation linéaire et homogène entre les nombres λ_1, λ_2, λ_3, de la forme

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 = 0,$$

l'équation (5) ne renferme plus que deux paramètres linéaires ; elle représente un faisceau tangentiel de coniques, et l'on dit que le faisceau appartient au réseau.

Parmi toutes les coniques représentées par l'équation (5), il en existe une infinité qui sont réduites à deux points ; nous allons démontrer que les droites joignant ces deux points, (droites qu'on appelle les droites doubles du réseau) enveloppent une courbe de troisième classe appelée la *Cayleyenne* du

réseau (du nom du géomètre anglais, M. CAYLEY, qui en a étudié le premier les propriétés).

Les coordonnées d'une telle droite vérifient les équations

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial u} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial u} = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial v} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial v} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial v} = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial w} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial w} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial w} = 0.$$

En éliminant λ_1, λ_2, λ_3 entre ces trois équations, on obtient

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \\ \frac{\partial f_1}{\partial w} & \frac{\partial f_2}{\partial w} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

qui est l'équation tangentielle de la Cayleyenne.

267. Cette courbe est aussi l'enveloppe des droites dont les pôles par rapport à toutes les coniques du réseau sont en ligne droite.

Considérons d'abord les trois coniques

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0;$$

les pôles d'une droite (u, v, w) par rapport à ces trois coniques ont pour équations

$$P_1 = U \frac{\partial f_1}{\partial u} + V \frac{\partial f_1}{\partial v} + W \frac{\partial f_1}{\partial w} = 0,$$

$$P_2 = U \frac{\partial f_2}{\partial u} + V \frac{\partial f_2}{\partial v} + W \frac{\partial f_2}{\partial w} = 0,$$

$$P_3 = U \frac{\partial f_3}{\partial u} + V \frac{\partial f_3}{\partial v} + W \frac{\partial f_3}{\partial w} = 0,$$

et pour que ces points soient en ligne droite il faut que l'équa-

tion (6) soit vérifiée, c'est-à-dire que la droite considérée soit tangente à la Cayleyenne.

Si cette condition est remplie, le point qui a pour équation

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0,$$

c'est-à-dire le pôle de la même droite par rapport à une conique quelconque du réseau sera en ligne droite avec les points P_1, P_2, P_3.

268. Revenons à l'exercice résolu au numéro 188, et dans l'équation $f(u, v, w) = 0$ considérons λ et R^2 comme variables ; cette équation représente un réseau tangentiel défini par les coniques

$$f_1 = au^2 + a'v^2 + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

qui représente une parabole,

et $$f_2 = u^2 + v^2 = 0, \qquad f_3 = w^2 = 0,$$

qui représentent respectivement les points cycliques et l'origine envisagée comme point double.

La Cayleyenne de ce réseau a pour équation

$$w[b''(u^2 - v^2) + (a' - a)uv - b'vw] = 0 ;$$

elle se décompose en un point, l'origine, ce qu'on pouvait prévoir, et une parabole P que nous avons étudiée. Cette parabole est donc l'enveloppe des droites dont les pôles par rapport aux coniques du réseau sont en ligne droite.

Or le pôle d'une droite par rapport au point double O est ce point lui-même; par rapport aux points cycliques, ce pôle est à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite ; il en résulte que la parabole P est l'enveloppe des droites qui sont perpendiculaires aux droites joignant l'origine à leurs pôles par rapport à une conique quelconque du réseau.

On peut également montrer que les droites dont on demande l'enveloppe dans l'exercice 188 sont des droites doubles du même réseau [1].

Menons du point O les tangentes OA et OB à une conique quelconque du réseau. L'ensemble des deux points A et B constitue une conique du réseau, donc la droite AB est tangente à la Cayleyenne.

Soit maintenant une tangente T à une conique quelconque du

---

[1] Voir *Nouvelles Annales*, 3e série, tome VIII, p. 331, un excellent article de M. Marchand sur ce sujet, auquel nous avons emprunté quelques-unes des remarques qui suivent.

réseau, qui soit perpendiculaire à la droite joignant le point O à son point de contact A. Le cercle de centre O et de rayon OA appartient au réseau, il est tangent à la conique ; ce cercle et la conique admettent donc deux autres tangentes communes rencontrant la droite T en deux points H et H′ dont l'ensemble constitue une conique du réseau ; donc la tangente T est tangente à la Cayleyenne.

Enfin, les deux foyers (situés sur un même axe) d'une conique quelconque du réseau constituent une conique du réseau ; donc la droite joignant ces deux points, c'est-à-dire l'axe de la conique, est tangente à la Cayleyenne.

269. Théorème (Chasles). — *Deux faisceaux appartenant à un même réseau ont toujours une conique commune.*

Soit, en effet, le réseau défini par l'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0\ ;$$

deux faisceaux appartenant à ce réseau seront déterminés par les deux équations

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 = 0,$$

$$b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 = 0,$$

qui déterminent toujours un système de valeurs pour λ_1, λ_2, λ_3.

270. Considérons comme exemple le réseau défini par les trois coniques suivantes :

1° Un point double O ;

2° Les points cycliques I et J ;

3° Une conique quelconque C.

Ce réseau est le même que celui que nous avons étudié au numéro 268, à cette différence près que la parabole est remplacée par une conique quelconque.

En combinant ces coniques deux à deux on a les trois faisceaux suivants :

1° Les cercles de centre O ;

2° Les coniques homofocales à C ;

3° Les coniques tangentes à C aux points de contact G et G′ des tangentes issues du point O.

Il résulte alors du théorème précédent qu'étant donné un faisceau quelconque appartenant au réseau, ce faisceau contiendra une conique faisant partie des trois faisceaux cités plus haut.

En particulier, étant donnée une conique homofocale à C, soit C_1, et une conique tangente à C aux points G et G′, soit C_2, il existera

un cercle de centre O inscrit dans le quadrilatère des tangentes communes à C_1 et à C_2.

Supposons que la conique C_1 se réduise aux foyers F et F′ de la conique C et que la conique C_2 se réduise aux points G et G′ ; les droites FG, FG′, F′G, F′G′ seront tangentes à un même cercle de centre O; on en déduit la relation

$$FG \pm F'G = FG' \pm F'G' ;$$

et comme les points G et G′ peuvent être pris quelconques sur la conique, on en conclut que pour tout point M de la courbe, on a

$$FM \pm F'M = \text{constante}.$$

Cette démonstration est due à Chasles.

271. Étant donné un réseau tangentiel

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \tag{5}$$

défini par les coniques $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, on peut définir ce réseau par trois coniques quelconques appartenant à ce réseau, à condition que ces trois coniques ne fassent pas partie d'un même faisceau tangentiel.

En effet, soient les trois coniques du réseau

$$\varphi_1 \equiv \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0,$$

$$\varphi_2 \equiv \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 = 0,$$

$$\varphi_3 \equiv \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_3 = 0 ;$$

pour que ces trois coniques n'appartiennent pas à un même faisceau, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si cette condition est remplie, on pourra tirer f_1, f_2, f_3 des équations précédentes et on aura

$$f_1 \equiv a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3,$$

$$f_2 \equiv b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3,$$

$$f_3 \equiv c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3,$$

et en remplaçant dans l'équation (5), on aura pour équation gé-

nérale des coniques du réseau

$$\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \mu_3\varphi_3 = 0.$$

272. Il n'existe pas en général de conique réduite à un point double parmi les coniques d'un réseau, car en écrivant que le premier membre de l'équation (5) est carré parfait, on a trois relations homogènes par rapport à λ_1, λ_2, λ_3 qui, en général, n'ont pas de solution.

Pour qu'il existe un point double faisant partie du réseau (5), il faut et il suffit qu'on ait une identité de la forme

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 \equiv P^2,$$

P désignant une fonction linéaire.

Cette condition exprime que l'une des trois coniques est bitangente à une conique du faisceau déterminé par les deux autres, et que le pôle de la corde des contacts est le point double P.

Si cette condition est remplie, la même propriété subsistera pour trois coniques quelconques du réseau, n'appartenant pas à un même faisceau,

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0,$$

car d'après ce que nous avons vu au numéro 271, l'identité précédente pourra s'écrire

$$k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + k_3\varphi_3 \equiv P^2,$$

et le pôle de la corde des contacts sera le même.

273. Application. — Considérons un réseau défini par deux coniques bitangentes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ et par les points cycliques $f_3 = 0$. Ce réseau a un point double P, pôle de la corde des contacts.

On peut, pour définir le réseau, remplacer les deux coniques f_1 et f_2 par deux coniques φ_1 et φ_2 homofocales respectivement à f_1 et f_2. Il existera alors une conique bitangente à f_3, c'est-à-dire un cercle inscrit dans le quadrilatère des tangentes communes à φ_1 et φ_2, et dont le centre sera le point P.

Supposons que l'on prenne pour coniques φ_1 et φ_2 les foyers des coniques f_1 et f_2 ; en joignant les foyers de f_1 aux foyers de f_2

on aura un quadrilatère circonscriptible à un cercle ayant pour centre le point P.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si deux coniques sont bitangentes, les foyers de l'une joints aux foyers de l'autre déterminent quatre droites tangentes à un cercle ayant pour centre le point de rencontre des tangentes communes.

Si la conique f_2 se réduit à deux points situés sur la conique f_1, on retrouve le théorème établi au numéro 270.

274. Réseaux ponctuels. — Étant données les équations ponctuelles de trois coniques

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_3(x, y, z) = 0,$$

l'ensemble des coniques définies par l'équation

$$\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \mu_3\varphi_3 = 0,$$

où μ_1, μ_2, μ_3 désignent des nombres arbitraires, constitue ce qu'on appelle un réseau ponctuel de coniques.

Parmi toutes les coniques du réseau, il en existe une infinité qui sont réduites à deux droites, les points de rencontre de ces droites (les points doubles du réseau) sont situés sur une courbe du troisième degré qu'on appelle la *Hessienne* du réseau et qui a pour équation

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette courbe est aussi le lieu des points dont les polaires par rapport à toutes les coniques du réseau sont concourantes.

275. Réseaux conjugués. — La relation linéaire et homogène la plus générale entre les coefficients de l'équation tangentielle d'une conique C exprime que cette conique est harmoniquement inscrite à une autre conique.

Si on assujettit cette conique C à être harmoniquement ins-

crite à trois coniques données ayant pour équations ponctuelles

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0, \quad \varphi_3(x, y, z) = 0,$$

on aura trois relations linéaires et homogènes entre les coefficients de l'équation tangentielle de la conique C, et par suite ces coefficients seront fonctions linéaires et homogènes de trois paramètres ; il en résulte que l'équation générale tangentielle des coniques C sera de la forme

$$\lambda_1 f_1(u, v, w) + \lambda_2 f_2(u, v, w) + \lambda_3 f_3(u, v, w) = 0; \qquad (5)$$

toutes ces coniques font donc partie d'un réseau tangentiel, et elles sont harmoniquement inscrites à toutes les coniques du réseau ponctuel

$$\mu_1 \varphi_1(x, y, z) + \mu_2 \varphi_2(x, y, z) + \mu_3 \varphi_3(x, y, z) = 0. \qquad (7)$$

On dit que les deux réseaux sont conjugués [1]. Une conique quelconque du réseau (5) est harmoniquement inscrite à une conique quelconque du réseau (7), et une conique quelconque du réseau (7) est harmoniquement circonscrite à une conique quelconque du réseau (5).

276. Soit une conique du réseau (5) réduite à deux points A et B ; la droite AB est tangente à la Cayleyenne du réseau, et les deux points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux coniques du réseau (7) ; il en résulte que la droite AB rencontre les coniques de ce réseau en des points en involution.

On en conclut que *l'enveloppe des droites rencontrant trois coniques données en des points en involution est une courbe de troisième classe, qui est la Cayleyenne du réseau tangentiel conjugué du réseau ponctuel défini par les trois coniques données.*

277. Soit une conique du réseau (7) réduite à deux droites

---

(1) A. Clebsch. *Leçons sur la Géométrie*, traduction Benoist, tome II, p. 250.

M. Picquet emploie l'expression de *contravariants*.

D et D′. Ces deux droites sont des sécantes communes à deux coniques C_1 et C_2 du réseau ; en leur adjoignant une conique quelconque C_3 du même réseau, ces trois coniques C_1, C_2, C_3 suffisent à définir le réseau. Dans ces conditions, la droite D rencontre ces trois coniques en des points en involution ; par conséquent la droite D, comme la droite D′, est tangente à la Cayleyenne du réseau (5).

Il en résulte que *la Cayleyenne d'un réseau tangentiel est l'enveloppe des couples de droites qui font partie du réseau ponctuel conjugué.*

278. *Corrélativement, le lieu des points tels que les tangentes issues de ces points à trois coniques données soient en involution est une courbe du troisième degré qui est la Hessienne du réseau ponctuel conjugué du réseau tangentiel défini par les trois coniques données.*

La Hessienne d'un réseau ponctuel est le lieu des couples de points qui font partie du réseau tangentiel conjugué. [1]

EXERCICES ET NOTES

1. *On considère deux triangles inscrits à une même conique et on leur circonscrit deux coniques bitangentes : enveloppe de leur corde de contact.*

Si les deux coniques circonscrites sont homothétiques, leur corde commune passe par un point fixe.

Les deux triangles donnés sont conjugués par rapport à une même conique C, à laquelle sont harmoniquement circonscrites les coniques considérées C_1 et C_2, et par suite toutes les coniques passant par les points communs à ces dernières ; en particulier les cordes communes correspondantes des coniques C_1 et C_2 sont des droites conjuguées à la courbe C. Par suite, si une de ces cordes

(1) Consulter sur ce sujet le chapitre VII du *Traité de Géométrie Analytique*, de M. H. PICQUET. Nous avons d'ailleurs emprunté à cet excellent ouvrage quelques-uns des exercices qui suivent.

est double, ce qui a lieu pour deux coniques bitangentes, elle est à elle-même sa droite conjuguée ; elle est donc tangente à la conique C qui constitue l'enveloppe demandée.

Si les coniques C_1 et C_2 sont homothétiques, la corde commune à distance finie passe par le pôle de la droite de l'infini, c'est-à-dire par le centre de la conique C.

2. *Le lieu des centres des cercles de rayon donné, harmoniquement inscrits à une conique donnée, est une conique concentrique et homothétique à la conique donnée.*

3. *Lorsqu'une hyperbole équilatère est harmoniquement circonscrite à un cercle ou inversement, celle des deux courbes qui est harmoniquement circonscrite passe par le centre de l'autre.*

4. *Le lieu des centres des cercles de rayon donné harmoniquement inscrits à une parabole est une parabole de même paramètre.*

5. Étant données les équations ponctuelles de trois coniques,

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= A_1x^2 + A_1'y^2 + A_1''z^2 + 2B_1yz + 2B_1'zx + 2B_1''xy = 0,\\
\varphi_2 &= A_2x^2 + A_2'y^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots = 0,\\
\varphi_3 &= A_3x^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0,
\end{aligned}$$

on peut mettre sous une forme remarquable l'équation tangentielle de la Cayleyenne du réseau tangentiel conjugué du réseau ponctuel défini par ces trois coniques, c'est-à-dire l'enveloppe des droites coupant ces trois coniques en des points en involution.

La droite $ux + vy + wz = 0$ sera tangente à la Cayleyenne si, jointe à une autre droite, elle fait partie du réseau

$$\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \mu_3\varphi_3 = 0,$$

c'est-à-dire si l'on a l'identité

$$\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \mu_3\varphi_3 \equiv (ux + vy + wz)(u'x + v'y + w'z)$$

ou

$$\begin{aligned}
\mu_1A_1 + \mu_2A_2 + \mu_3A_3 - uu' &= 0,\\
\mu_1A_1' + \mu_2A_2' + \mu_3A_3' - vv' &= 0,\\
\mu_1A_1'' + \mu_2A_2'' + \mu_3A_3'' - ww' &= 0,\\
2\mu_1B_1 + 2\mu_2B_2 + 2\mu_3B_3 - vw' - wv' &= 0,\\
2\mu_1B_1' + 2\mu_2B_2' + 2\mu_3B_3' - wu' - uw' &= 0,\\
2\mu_1B_1'' + 2\mu_2B_2'' + 2\mu_3B_3'' - uv' - vu' &= 0.
\end{aligned}$$

En éliminant μ_1, μ_2, μ_3, u', v', w', on a

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & u & 0 & 0 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & 0 & v & 0 \\ A''_1 & A''_2 & A''_3 & 0 & 0 & w \\ 2B_1 & 2B_2 & 2B_3 & 0 & w & v \\ 2B'_1 & 2B'_2 & 2B'_3 & w & 0 & u \\ 2B''_1 & 2B''_2 & 2B''_3 & v & u & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On verrait de la même manière que le lieu des points d'où l'on peut mener des tangentes en involution aux trois coniques

$$f_1 = a_1u^2 + a'_1v^2 + a''_1w^2 + 2b_1vw + 2b'_1wu + 2b''_1uv = 0,$$
$$f_2 = a_2u^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$f_3 = a_3u^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

c'est-à-dire la Hessienne du réseau conjugué, est

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x & 0 & 0 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & 0 & y & 0 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 & 0 & 0 & z \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 & 0 & z & y \\ 2b'_1 & 2b'_2 & 2b'_3 & z & 0 & x \\ 2b''_1 & 2b''_2 & 2b''_3 & y & x & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6. *Un réseau tangentiel renferme en général quatre cercles dont les centres sont les sommets d'un triangle et le point de concours de ses hauteurs.*

7. *Lorsque trois hyperboles équilatères ont deux points communs, toute droite perpendiculaire à la corde commune les coupe suivant six points en involution.*

8. Considérons un réseau ponctuel défini par trois coniques ayant deux points communs B et C. En prenant pour triangle de référence le triangle ABC, A étant un point quelconque, les équations des coniques s'écrivent

$$a_1x^2 + 2b_1yz + 2b'_1zx + 2b''_1xy = 0,$$
$$a_2x^2 + 2b_2yz + 2b'_2zx + 2b''_2xy = 0,$$
$$a_3x^2 + 2b_3yz + 2b'_3zx + 2b''_3xy = 0.$$

Pour déterminer le réseau tangentiel conjugué, écrivons que la conique

$$\alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2\beta' wu + 2\beta'' uv = 0 \qquad (1)$$

est harmoniquement inscrite par rapport aux trois premières ; on a

$$a_1\alpha + 2b_1\beta + 2b'_1\beta' + 2b''_1\beta'' = 0,$$
$$a_2\alpha + 2b_2\beta + 2b'_2\beta' + 2b''_2\beta'' = 0,$$
$$a_3\alpha + 2b_3\beta + 2b'_3\beta' + 2b''_3\beta'' = 0;$$

résolvons ces équations par rapport à β, β', β'' ; on a des solutions de la forme

$$\beta = \alpha\lambda, \qquad \beta' = \alpha'\lambda, \qquad \beta'' = \alpha\lambda'',$$

λ, λ', λ'' étant fonctions des coefficients des trois coniques données.

L'équation (1) devient alors

$$\alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\alpha(\lambda vw + \lambda' wu + \lambda'' uv) = 0,$$

α, α', α'' étant arbitraires, on peut donc considérer cette équation comme représentant le réseau tangentiel relatif aux trois coniques

$$u^2 + 2\lambda vw + 2\lambda' wu + 2\lambda'' uv = 0,$$
$$v^2 = 0,$$
$$w^2 = 0,$$

et la Cayleyenne de ce réseau a pour équation

$$(u + \lambda'' v + \lambda' w)\, vw = 0;$$

elle se compose de trois points ; deux d'entre eux sont les deux points B et C, le troisième est le point par lequel passent les cordes communes qui dans deux coniques quelconques du réseau ponctuel joignent les deux points de rencontre autres que B et C.

Soit O ce point ; on voit que le point O est le pôle de la droite BC par rapport à toutes les coniques du réseau tangentiel.

Il résulte de là que les cordes qui divisent en involution les coniques du réseau ponctuel passent par le point O.

Dans le cas particulier de l'exercice 7, ce point est à l'infini dans la direction perpendiculaire à la corde commune.

On peut reconnaître aisément que, dans le cas général, la Hessienne se compose de la droite BC et d'une conique.

9. Supposons que les deux points B et C de l'exercice précédent soient les points cycliques ; les trois coniques données sont alors des cercles, et l'on sait que la Hessienne se compose de la droite de l'infini et du cercle orthogonal.

La Cayleyenne du réseau conjugué se réduit aux points cycliques

et au centre radical des trois cercles, qui est le centre commun des coniques du réseau tangentiel.

10. *Le lieu des centres des coniques d'un réseau tangentiel dont la somme des carrés des axes est constante est un cercle concentrique au cercle du réseau ponctuel conjugué. Cas où la somme des carrés des axes est nulle.*

11. Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. — Dans un grand nombre d'exercices résolus et proposés nous avons souvent rencontré comme enveloppe d'une droite variable l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Je me propose, dans cette note, de montrer comment on peut reconnaître cette courbe d'après son équation tangentielle, et comment on peut en déterminer les éléments.

Si l'on prend comme axes de coordonnées deux diamètres perpendiculaires du cercle fixe, l'axe Ox passant par l'un des points de rebroussement, l'équation de la tangente en un point de la courbe peut s'écrire

$$x \sin \frac{\varphi}{2} + y \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{R}{3} \sin \frac{3\varphi}{2} = 0;$$

on le voit aisément en faisant $r = -\frac{R}{3}$ dans l'équation de la tangente à l'épicycloïde obtenue page 59.

En conséquence, pour qu'une droite

$$ux + vy + w = 0$$

soit tangente à la courbe, il faut qu'on puisse déterminer φ en sorte qu'on ait les égalités

$$\frac{u}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{v}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{-3w}{R \sin \frac{3\varphi}{2}}.$$

En éliminant φ, on obtient l'équation

$$w(u^2 + v^2) + \frac{R}{3}(3uv^2 - u^3) = 0; \qquad (1)$$

on reconnaît sous cette forme que la courbe est de troisième classe, qu'elle est bitangente à la droite de l'infini (Ex. 12, p. 54), les points de contact ayant pour équation

$$u^2 + v^2 = 0,$$

c'est-à-dire étant les points cycliques.

Nous allons démontrer que, réciproquement, *toute courbe de troisième classe qui touche la droite de l'infini aux points cycliques est une hypocycloïde à trois rebroussements.*

L'équation tangentielle générale des courbes de troisième classe touchant la droite de l'infini aux points cycliques est

$$w(u^2+v^2-2uv\cos\theta)+\varphi(u, v)=0, \qquad (2)$$

θ désignant l'angle des axes de coordonnées, et $\varphi(u, v)$ représentant un polynome homogène du troisième degré en u et v, par exemple

$$\varphi(u, v)\equiv au^3+bu^2v+cuv^2+dv^3.$$

Pour établir notre proposition, nous transporterons d'abord l'origine des coordonnées en un point (p, q) choisi de telle manière que les tangentes issues de ce point à la courbe fassent deux à deux des angles égaux à $\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire qu'elles puissent coïncider avec les diagonales d'un hexagone régulier. Ensuite nous ferons tourner les axes de façon que l'axe des x se confonde avec l'une de ces tangentes, et nous verrons que l'équation de la courbe aura la même forme que l'équation (1).

En transportant l'origine des coordonnées au point (p, q), l'équation (2) devient

$$(w-up-vq)(u^2+v^2-2uv\cos\theta)+\varphi(u, v)=0;$$

les coordonnées des tangentes à l'origine vérifient l'équation

$$-(up+vq)(u^2+v^2-2uv\cos\theta)+\varphi(u, v)=0,$$

et leurs coefficients angulaires sont donnés par

$$-(pm-q)(m^2+2m\cos\theta+1)+\varphi(m, -1)=0. \qquad (3)$$

Cherchons maintenant l'équation aux coefficients angulaires de trois droites, telles que l'axe Ox fasse avec elles respectivement des angles égaux à α, $\alpha+\frac{\pi}{3}$ et $\alpha+\frac{2\pi}{3}$.

Si m désigne le coefficient angulaire de la première, on aura

$$\frac{m\sin\theta}{1+m\cos\theta}=\operatorname{tg}\alpha;$$

on en déduit, en introduisant le symbole imaginaire i,

$$\frac{m(\cos\theta+i\sin\theta)+1}{m(\cos\theta-i\sin\theta)+1}=\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$$

ou

$$\frac{me^{i\theta}+1}{me^{-i\theta}+1}=e^{2i\alpha};$$

on aura pour les deux autres droites

$$\frac{me^{i\theta}+1}{me^{-i\theta}+1}=e^{2i\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}, \qquad \frac{me^{i\theta}+1}{me^{-i\theta}+1}=e^{2i\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)}.$$

Comme les cubes des trois seconds membres sont égaux à $e^{6i\alpha}$, on

voit que les coefficients angulaires des trois droites vérifient l'équation

$$\left(\frac{me^{i\theta}+1}{me^{-i\theta}+1}\right)^3 = e^{6i\alpha}$$

ou

$$e^{6i\alpha}(me^{-i\theta}+1)^3 - (me^{i\theta}+1)^3 = 0.$$

L'équation (3) devant avoir mêmes racines que cette dernière équation, on aura l'identité

$$-(pm-q)(m^2+2m\cos\theta+1)+\varphi(m,-1)$$
$$\equiv h\left[e^{6i\alpha}(me^{-i\theta}+1)^3-(me^{i\theta}+1)^3\right].$$

En écrivant que les coefficients des mêmes puissances de m sont égaux, on déterminerait p, q, α et h ; mais on peut calculer α sans déterminer p et q, il suffit de remplacer dans l'identité m successivement par les deux nombres $-e^{i\theta}$ et $-e^{-i\theta}$, qui annulent $m^2+2m\cos\theta+1$; on obtient

$$\varphi(-e^{i\theta},-1) = -h(1-e^{2i\theta})^3,$$
$$\varphi(-e^{-i\theta},-1) = he^{6i\alpha}(1-e^{-2i\theta})^3.$$

On déduit de là sans peine, après quelques réductions faciles, et en se souvenant que $\varphi(u, v)$ est homogène et du troisième degré,

$$h = \frac{\varphi(1, e^{-i\theta})}{8i\sin^3\theta},$$

$$e^{6i\alpha} = \frac{\varphi(1, e^{i\theta})}{\varphi(1, e^{-i\theta})}.$$

On en tire

$$\frac{1+i\operatorname{tg}3\alpha}{1-i\operatorname{tg}3\alpha} = \frac{a+be^{i\theta}+ce^{2i\theta}+de^{3i\theta}}{a+be^{-i\theta}+ce^{-2i\theta}+de^{-3i\theta}},$$

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{b\sin\theta+c\sin2\theta+d\sin3\theta}{a+b\cos\theta+c\cos2\theta+d\cos3\theta}.$$

L'identité qui précède devient alors, en remplaçant h et $e^{6i\alpha}$ par ces valeurs,

$$-(pm-q)(m^2+2m\cos\theta+1)+\varphi(m,-1)$$
$$\equiv \frac{1}{8i\sin^3\theta}\left[\varphi(1, e^{i\theta})(me^{-i\theta}+1)^3-\varphi(1, e^{-i\theta})(me^{i\theta}+1)^3\right];$$

le second membre pouvant s'écrire, développé,

$$\frac{1}{4\sin^2\theta}\left[m^3[a(4\sin^2\theta-3)-2b\cos\theta-c]+3m^2(d-b-2a\cos\theta)\right.$$
$$\left.+3m(c-a+2d\cos\theta)+b+2c\cos\theta+d(3-4\sin^2\theta)\right].$$

En égalant les coefficients de m^3 et les termes indépendants, on obtient les valeurs de p et de q,

$$p = \frac{3a + c + 2b \cos \theta}{4 \sin^2 \theta},$$

$$q = \frac{3d + b + 2c \cos \theta}{4 \sin^2 \theta}.$$

Nous obtenons ainsi le centre de l'hypocycloïde et les directions des tangentes aux points de rebroussement.

En tenant compte de ces transformations, l'équation tangentielle de la courbe peut s'écrire

$$w(u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta) + h[e^{6i\alpha}(ue^{-i\theta} - v)^3 - (ue^{i\theta} - v)^3] = 0.$$

Prenons maintenant pour axe des x' une droite Ox' telle que

$$(Ox, Ox') = \alpha,$$

et pour axe des y' une perpendiculaire à Ox', telle que

$$(Ox', Oy') = \frac{\pi}{2}.$$

Les formules de transformation de coordonnées sont les formules (4) de la page 32, où l'on fait $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ et $\lambda = 1$; on a

$$\begin{aligned} u &= u' \cos \alpha - v' \sin \alpha, \\ v &= u' \cos (\theta - \alpha) + v' \sin (\theta - \alpha), \\ w &= w'. \end{aligned}$$

On voit aisément en faisant la substitution dans l'équation que $u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta$ se transforme en $(u'^2 + v'^2) \sin^2 \theta$; d'autre part, on trouve

$$ue^{-i\theta} - v = - \sin \theta e^{-i\alpha}(iu' + v'),$$

$$ue^{i\theta} - v = - \sin \theta e^{i\alpha}(- iu' + v');$$

enfin, on a

$$he^{3i\alpha} = \pm \frac{1}{8i \sin^3 \theta} \sqrt{\varphi(1, e^{i\theta})\varphi(1, e^{-i\theta})}.$$

Le radical est égal au module de l'expression $\varphi(1, e^{i\theta})$; soit A ce module, on aura

$$A = \sqrt{(a + b \cos \theta + c \cos 2\theta + d \cos 3\theta)^2 + (b \sin \theta + c \sin 2\theta + d \sin 3\theta)^2},$$

et l'équation de la courbe s'écrit

$$w'(u'^2 + v'^2) \pm \frac{A}{4 \sin^2 \theta} (3u'v'^2 - u'^3) = 0.$$

En comparant avec l'équation (1), on voit que cette équation représente une hypocycloïde à trois rebroussements, dont le rayon R du cercle fixe est donné par

$$R = \frac{3A}{4 \sin^2 \theta}.$$

En résumé, on voit que l'équation

$$w(u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta) + au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 = 0$$

représente une hypocycloïde à trois rebroussements; son centre a pour coordonnées

$$p = \frac{3a + c + 2b \cos\theta}{4 \sin^2\theta},$$

$$q = \frac{3d + b + 2c \cos\theta}{4 \sin^2\theta},$$

le rayon du cercle fixe est égal à

$$\frac{3}{4 \sin^2\theta} \sqrt{(a + b\cos\theta + c\cos 2\theta + d\cos 3\theta)^2 + (b \sin\theta + c \sin 2\theta + d \sin 3\theta)^2},$$

et l'axe des x fait avec les tangentes de rebroussement les angles α définis par la relation

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{b \sin\theta + c \sin 2\theta + d \sin 3\theta}{a + b \cos\theta + c \cos 2\theta + d \cos 3\theta}.$$

Dans le cas où les axes de coordonnées sont rectangulaires, on a

$$p = \frac{3a + c}{4}, \qquad q = \frac{3d + b}{4},$$

$$R = \frac{3}{4} \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2},$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{b - d}{a - c}.$$

A titre d'exemple, reportons-nous aux exercices du Chapitre II, p. 51, et considérons d'abord l'exercice 2. On trouve la courbe qui a pour équation tangentielle

$$w(u^2 + v^2) + 4uv(\alpha v + \beta u) = 0.$$

Cette courbe est une hypocycloïde à trois rebroussements, quels que soient α et β (et non pas seulement dans le cas où la corde AB est un diamètre, comme nous l'avons dit à tort).

Le centre de cette courbe est le point (α, β), c'est-à-dire le centre du cercle considéré dans l'exercice, le rayon R est égal à $3\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, c'est-à-dire à trois fois le rayon du cercle donné.

On voit également (exercice 6) que la droite de Simson enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements; en appliquant les formules qui précèdent, on verra que le centre de la courbe coïncide avec le centre du cercle des neuf points et que le rayon R est le triple du rayon de ce cercle.

Ce résultat est dû à Steiner (*Journal de Crelle*, tome 53).

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE IV

Tangentes et Normales. 76

CHAPITRE V

Classification des courbes de deuxième classe. 93

CHAPITRE VI

Pôles et Polaires. 111

CHAPITRE VII

Centre, Diamètres et Axes. 126

CHAPITRE VIII

CHAPITRE IX

CHAPITRE X

CHAPITRE XI

CHAPITRE XII

Ombilics et droites qui ont même pôle par rapport à deux coniques. 226

CHAPITRE XIII

Coordonnées trilatères. 254

CHAPITRE XIV

BAR-LE-DUC. — IMPRIMERIE COMTE-JACQUET

